

Ein hybrides, gemischtes Verfahren für die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

Alexander Jaust

3. April 2013

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem neuen Diskretisierungsverfahren für die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen aus der Strömungsmechanik [8]. Das Verfahren basiert auf den sogenannten unstetigen Galerkin-Verfahren (kurz: DG-Verfahren, engl. discontinuous Galerkin methods). Dabei wird die Lösung mittels unstetiger Polynome approximiert. Um die Anzahl der zu bestimmenden Freiheitsgrade zu verringern, werden in dem vorgestellten Verfahren sogenannte hybride Ansatzfunktionen eingeführt. Die bisherigen Ergebnisse mit diesem neuen Verfahren zeigen eine gute Konvergenzgeschwindigkeit und hohe Genauigkeit des Verfahrens [8].

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Zunächst werden die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Anschließend wird anhand eines einfachen Problems das DG-Verfahren erklärt, um darauf aufbauend das hybride, gemischte Verfahren zu erläutern. Dabei wird insbesondere gezeigt, was sich im Vergleich zu klassischen DG-Verfahren ändert und die Vorteile des neuen Verfahrens sind. Das bestehende Programmpaket wird im Rahmen des Seminars um implizite Zeitintegrationsverfahren erweitert. Deshalb werden anschließend die verwendeten Integrationsverfahren vorgestellt. Abschließend werden einige Simulationsergebnisse präsentiert.

2 Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

In vielen technischen Bereichen sind Prozesse mit strömenden Fluiden (Flüssigkeiten und Gase) von großer Bedeutung. Durch die Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich inkompressible ($\rho = \text{const}$) und kompressible ($\rho \neq \text{const}$) Strömungen beschreiben. Die Größe ρ ist die Dichte des Fluids und newtonsch bedeutet, dass die sogenannte Scherspannung τ des Fluids eine lineare Funktion des Geschwindigkeitsgradienten ist:

$$\tau_{ij} = \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (1)$$

Die dynamische Viskosität η ist eine charakteristische Größe des betrachteten Fluids, die die Zähigkeit des Fluids beschreibt. Da für jede Geschwindigkeitskomponente u_i die Ableitung in jede Raumrichtung x_j mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gebildet werden kann, lassen sich die Ableitungen als Matrix bzw. Tensor zweiter Stufe, dem sogenannten Spannungstensor S , mit entsprechenden Einträgen τ_{ij} schreiben. Die Navier-Stokes-Gleichungen sind ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen der folgenden Form (in Vektorschreibweise) [7]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \nabla p + \nabla \cdot S \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \vec{v}) = \rho \vec{g} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot (p \vec{v}) + \nabla \cdot (S \cdot \vec{v}). \quad (4)$$

Die erste Gleichung (2) ist eine skalare Gleichung und beschreibt die Massenerhaltung. Sie wird auch Kontinuitätsgleichung genannt. Neben der Dichte ρ kommt der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} in der Gleichung vor. Die zweite Gleichung (3) ist eine vektorwertige Gleichung mit je einer Komponente für jede Raumrichtung $d \in \{1, 2, 3\}$. Dadurch wird die Erhaltung des Impulses $\vec{m} = \rho \vec{v}$ in die entsprechenden Raumrichtungen beschrieben. Auf der rechten Seite treten nun zusätzlich eine Gravitationsbeschleunigung \vec{g} , der Druck p und der Spannungstensor S auf. Die letzte Gleichung ist wie die Kontinuitätsgleichung skalar und beschreibt die Erhaltung der Gesamtenergie E . Neben den bisher eingeführten Größen ist zusätzlich der Wärmetransport \vec{q} für den Energietransport wichtig. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass das Fluid Luft ist. Gase, wie z.B. Luft, haben eine kleine Dichte, so dass der Einfluss der Gravitation sehr gering ist. Die Gravitationsbeschleunigung $\rho \vec{g} \cdot \vec{v}$ wird in dieser Arbeit deshalb zu null gesetzt.

Da man $d + 2$ Gleichungen, aber insgesamt $d + 3$ Unbekannte (Dichte ρ , Geschwindigkeit \vec{v} mit d Komponenten, Druck p und Energie E) hat, benötigt man noch eine zusätzliche Gleichung zur Schließung des Gleichungssystems. Eine übliche Wahl ist das ideale Gasgesetz

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho \|\vec{v}\|_2^2 \right) \quad (5)$$

mit dem Isentropenexponent $\gamma = 1,4$ für Luft.

Zur Vollständigkeit soll noch eine andere Notation der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen gezeigt werden, die auch in dem der Arbeit zugrundeliegenden Manuskript [8] verwendet wird. Dazu werden die Navier-Stokes-Gleichungen (2)-(4) in folgende Form umgeschrieben:

$$\vec{w}_t + \nabla \cdot (f(\vec{w}) - f_v(\vec{w}, \nabla \vec{w})) = 0. \quad (6)$$

Der Vektor \vec{w}_t ist die Zeitableitung des Vektors der Erhaltungsgrößen $w = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T$. Zusätzliche gibt es zwei Flüsse; den konvektiven Fluss $f = (f_1, f_2)$ und den diffusiven

Fluss $f_v = (f_{v,1}, f_{v,2})$ die definiert sind als

$$f_1 = (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, u(E + p))^T \quad (7)$$

$$f_2 = (\rho v, \rho uv, p + \rho v^2, v(E + p))^T \quad (8)$$

$$f_{v,1} = (0, \tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{11}u + \tau_{12}v + kT_{x1})^T \quad (9)$$

$$f_{v,2} = (0, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{21}u + \tau_{22}v + kT_{x2})^T. \quad (10)$$

Die Flüsse erhält man durch Umformen der Navier-Stokes-Gleichungen und aufteilen nach Termen in denen Gradienten der Erhaltungsgrößen auftreten (diffusiver Fluss) und Termen ohne Gradienten der Erhaltungsgrößen. Im diffusiven Fluss ist der Wärmefluss \vec{q} durch das Fouriersche Gesetz ersetzt worden, das den Wärmefluss aus dem Temperaturgradienten T_{xi} in die entsprechende Raumrichtung i und einer materialabhängigen Wärmeleitfähigkeit k bestimmt. Die Einträge τ_{ij} sind die entsprechenden Einträge aus dem Spannungstensor S und beinhalten die Viskosität des Fluids (vgl. (1)). Es wurde ebenfalls die Annahme getroffen, dass das Fluid ein Gas ist, auf das die Gravitationsbeschleunigung einen geringen Einfluss hat, weshalb keine Terme mit der Gravitationsbeschleunigung \vec{g} auftreten.

Die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben Strömungen für beliebige newtonsche Fluide. Als Spezialfälle ergeben sich u.a. inkompressible Strömungen ($\rho = const$) oder reibungsfreie Strömungen ($\eta = 0$). Für die Beschreibung inkompressibler Strömungen wird die Energiegleichung nicht benötigt, da eine Unbekannte weniger auftritt, und die Gleichungen lassen sich vereinfachen. Bei reibungsfreien Strömungen verschwindet der Spannungstensor S in den Navier-Stokes-Gleichungen und das Gleichungssystem vereinfacht sich zu den sogenannten "Euler-Gleichungen", die in der Gasdynamik von großer Bedeutung sind.

3 Diskontinuierliche Galerkin-Verfahren

Zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen werden numerische Lösungsverfahren angewendet, da sich im Allgemeinen keine analytische Lösung für praktische Problemstellungen angeben lässt. Übliche Klassen von Methoden sind die Finite-Differenzen-Verfahren (*kurz*: FD-Verfahren), Finite-Volumen-Verfahren (*kurz*: FV-Verfahren) und Finite-Elemente-Verfahren (*kurz*: FE-Verfahren). Die FE-Verfahren haben im Laufe der Zeit an Bedeutung gewonnen, da sich damit relativ einfach Verfahren hoher Ordnung konstruieren lassen. "Klassische" FE-Verfahren, die stetige Ansatz- und Testfunktionen verwenden, sind für hyperbolische Probleme jedoch nicht stabil. Das gilt in der Regel auch für die kompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen, da diese hyperbolische Anteile haben. Das im Rahmen der Seminararbeit bearbeitete Verfahren gehört zu der Klasse der unstetigen Galerkin-Verfahren (*kurz*: DG-Verfahren) und kombiniert Eigenschaften der FV- und FE-Verfahren. Die DG-Verfahren erlauben es, die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit hoher Genauigkeit zu approximieren.

Das generelle Vorgehen zur Diskretisierung soll anhand des hyperbolischen Problems

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot f(u) = q, \quad \forall x \in \Omega \quad (11)$$

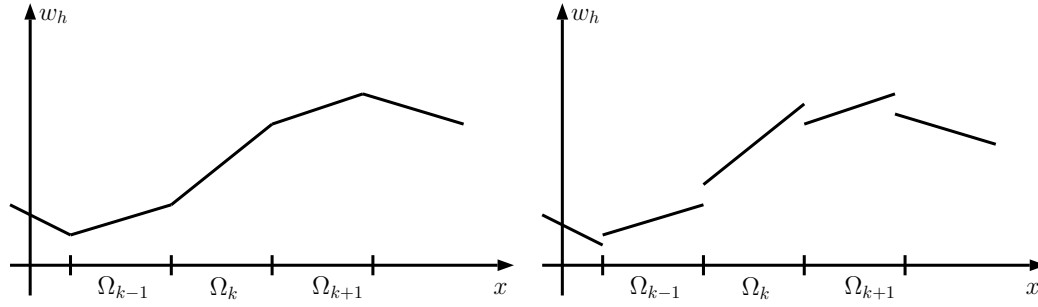


Abbildung 1: Links die Approximation der Lösung durch stetige und rechts durch unstetige Ansatzfunktionen mit Polynomgrad 1. Man erkennt die Sprünge zwischen den Funktionswerten (rechts).

erläutert werden. Darin sind u die Erhaltungsgröße, f die Flussfunktion und q ein Quellterm. Es kann sich dabei im Allgemeinen um vektorwertige Größen/Funktionen handeln. Zur besseren Lesbarkeit wird aber von einem skalaren Problem ausgegangen und auf die Behandlung von Randbedingungen verzichtet.

Zur Diskretisierung wird das Gebiet Ω in N disjunkte Teilgebiete Ω_k aufgeteilt, so dass $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$ gilt. Zusätzlich benötigen wir den Polynomraum:

$$V^m := \{f \in L^2(\Omega) \mid f|_{\Omega_k} \in \Pi^m(\Omega_k), \forall k = 1, \dots, N\}. \quad (12)$$

Nun multipliziert man das hyperbolische Problem (11) mit einer Testfunktion $\varphi \in V^1$ und integriert anschließend über ein Gebiet Ω_k . Somit erhält man:

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx + \int_{\Omega_k} (\nabla \cdot f(u)) \varphi dx = \int_{\Omega_k} q \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V^1. \quad (13)$$

Durch partielle Integration lässt sich die Ortsableitung auf die Testfunktion φ übertragen und man erhält die schwache Formulierung des Problems:

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial u}{\partial t} \varphi dx + \int_{\partial \Omega_k} \varphi f(u) \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Omega_k} f(u) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_k} q \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V^1. \quad (14)$$

Man sieht, dass die einzelnen Elemente nur über den Fluss über die Elementgrenzen miteinander gekoppelt sind. Es wird nun angenommen, dass die Lösung u soll nun im gleichen Raum V^1 wie die Testfunktion liegen, d.h. $u \in V^1$. Dadurch wird erlaubt, dass die Lösung über Elementgrenzen hinweg unstetig ist (vgl. Abb. 1). Da der Fluss auf der Grenze zwischen zwei Elementen bestimmt werden muss, ergibt sich das Problem, dass der Fluss nicht eindeutig bestimmt werden kann. Zwei benachbarte Elemente können auf der Grenze verschiedene Werte der Lösung haben. Die Werte auf dem Rand $\partial \Omega_k$ eines Elements Ω_k werden mit $u^\pm(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} u(x \pm \tau \vec{n})$ bezeichnet. Der Normalenvektor \vec{n} ist als nach außen zeigender Normalenvektor definiert und wird auch mit \vec{n}^+ bezeichnet

(vgl. Abb. 2). Wählt man eine kantenbasierte Formulierung, bei der alle Ränder $\partial\Omega_k$ zwischen benachbarten Teilgebieten Ω_k und $\Omega_{k'}$ in einer Menge Γ genau einmal vorkommen, muss eine Richtung als positive Richtung \vec{n}^+ definiert werden (vgl. Abb. 3). Um einen sinnvollen Fluss bestimmen zu können, ersetzt man die Flussfunktion f durch einen numerischen Fluss $f^{num}(u, v, \vec{n}) \approx f(u) \cdot \vec{n}$, wie er in den FV-Verfahren verwendet wird. Der numerische Fluss f^{num} muss die folgenden Eigenschaften haben:

1. Konsistenz:

$$f^{num}(u, u, \vec{n}) = f(u) \cdot \vec{n} \quad (15)$$

2. Lipschitz-Stetigkeit:

$$|f^{num}(u, w, \vec{n}) - f^{num}(v, w, \vec{n})| \leq L_1 |u - v| \quad (16)$$

$$|f^{num}(w, u, \vec{n}) - f^{num}(w, v, \vec{n})| \leq L_2 |u - v| \quad (17)$$

3. Monotonie: Der numerische Fluss f^{num} fällt nicht im ersten Argument und wächst im zweiten Argument nicht.

Bekannte Flüsse, die diese Eigenschaften erfüllen, sind der Godunov-Fluss, der Lax-Friedrichs-Fluss oder der Lax-Wendroff-Fluss [5]. Setzt man nun den numerischen Fluss ein, summiert über alle Elemente so erhält man ein DG-Verfahren:

Definition 1 (DG-Verfahren) *Finde eine Lösung $u_h \in V^1 := \{f \in L^2(\Omega) | f|_{\Omega_k} \in \Pi^1(\Omega_k), \forall k = 1, \dots, N\}$, so dass*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_h}{\partial t} \varphi dx + \int_{\Gamma} (\varphi^- - \varphi^+) f^{num}(u_h^+, u_h^-, \vec{n}) d\sigma - \int_{\Omega} f(u_h) \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} q \varphi dx, \quad \forall \varphi \in V^1 \quad (18)$$

gilt, mit einer Partitionierung des Gebiets $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$. Γ bezeichne alle Kanten zwischen zwei benachbarten Gebieten Ω_k und $\Omega_{k'}$ und u^+ bzw. u^- den entsprechenden Grenzwert auf dem Rand des entsprechenden Gebiets.

4 Das hybride, gemischte Verfahren

Wie gezeigt wurde, existieren die Lösungen bei DG-Verfahren jeweils Elementweise. Da in der diskreten Version des DG-Verfahrens, die Lösung über eine Polynombasis dargestellt wird, müssen für die Lösung auf jedem Element entsprechende Koeffizienten bestimmt werden. Diese Koeffizienten werden auch Freiheitsgrade genannt. Ein Problem der DG-Verfahren ist die hohe Anzahl von miteinander gekoppelten Freiheitsgraden. Die Jacobische wächst quadratisch mit der Anzahl der lokalen Freiheitsgrade, wird jedoch für implizite Relaxationsmethoden benötigt. Eine Möglichkeit, um die Anzahl der lokalen Freiheitsgrade zu reduzieren, ist die Hybridisierung des Problems. Durch die Einführung zusätzlicher Ansatzfunktionen auf den Kanten der Elemente, können die zu bestimmenden Freiheitsgrade auf die Kanten reduziert werden (s. Abb. 2).

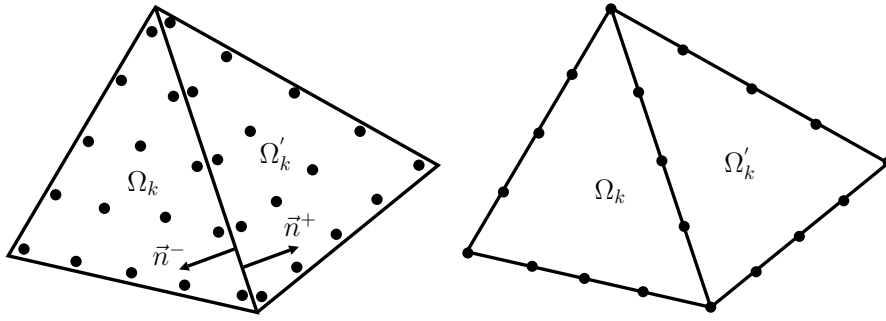


Abbildung 2: Links sind exemplarisch die lokalen Freiheitsgrade eines DG-Verfahrens dargestellt und rechts die Freiheitsgrade des hybridisierten Verfahrens.

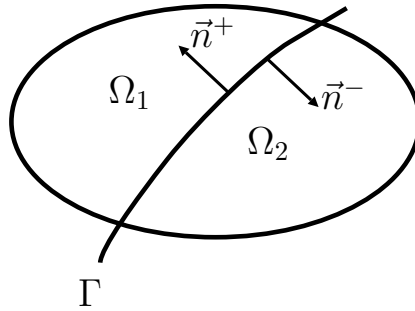


Abbildung 3: Das Gebiet Ω wird durch die Kante $\Gamma = \Omega_1 \cap \Omega_2$ in die Teilgebiete Ω_1 und Ω_2 geteilt. Der Normalenvektor \vec{n}^+ zeigt nach außen, d.h. in das Gebiet Ω_1 .

Das Vorgehen wird anhand an der skalaren, stationären, nichtlinearen Konvektions-Diffusionsgleichung vorgestellt, da sich die Ideen des Verfahrens daran einfacher zeigen lassen als an den Navier-Stokes-Gleichungen. Die Gleichung besitzt ähnliche mathematische Eigenschaften wie die Navier-Stokes-Gleichungen (nichtlinear, konvektive und diffusive Prozesse) und bietet sich deshalb zu Analyse an.

Zunächst wird eine Gleichung hergeleitet, die zur Bestimmung von Größen auf den Kanten genutzt wird. Anschließend wird mit Hilfe der hergeleiteten Gleichung das gemischte Verfahren inklusive der hybriden Variable formuliert. Zum Schluss wird das Verfahren mit Hilfe der hybriden Variable umgeschrieben, so dass die Lösung aus den hybriden Variablen bestimmt werden kann.

4.1 Hybridisierung der Konvektions-Diffusionsgleichung

Die nichtlineare Konvektions-Diffusionsgleichung hat die Form:

$$w_t + \nabla \cdot f(w) - \varepsilon \Delta w = h, \quad \forall x \in \Omega \quad (19)$$

$$w = 0, \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (20)$$

Dabei ist w die transportierte Größe, $f(w)$ ein (nichtlinearer) Fluss, $\varepsilon > 0$ die Diffusivität und h ein möglicher Quellterm. Die zweite Gleichung beschreibt die Randbedingung. Wir nehmen hier an, dass die Lösung ausreichend regulär ist, d.h. w ist mindestens aus $H^2(\Omega)$. Die schwache Formulierung der Gleichung (19) ist

$$N(w, \varphi) := \int_{\Omega} w_t \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} f(w) \cdot \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla w \cdot \nabla \varphi dx \stackrel{!}{=} \int_{\Omega} \varphi h dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (21)$$

Wir teilen das Gebiet Ω mittels einer Kante Γ in zwei Teile $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ mit $\Gamma := \Omega_1 \cap \Omega_2$ und zugehörigen Normalenvektoren \vec{n}^{\pm} (s. Abb. 3). Das Problem (19) lässt sich nun unabhängig auf beiden Gebieten formulieren:

$$w_t \nabla \cdot f(w_1) - \varepsilon \Delta w_1 = h \quad \forall x \in \Omega_1, \quad w_1 = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \quad w_1 = \lambda \quad \forall x \in \Gamma \quad (22)$$

$$w_t \nabla \cdot f(w_2) - \varepsilon \Delta w_2 = h \quad \forall x \in \Omega_2, \quad w_2 = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \quad w_2 = \lambda \quad \forall x \in \Gamma. \quad (23)$$

Wie die Lösung w müssen auch die Teillösungen w_1 und w_2 regulär sein, d.h. sie sind mindestens aus $H^2(\Omega_i)$, $i = \{1, 2\}$. Um die Stetigkeit der Teillösungen auf der Kante sicherzustellen, wird die zusätzliche Größe λ eingeführt. Die Lösung des Problems setzt sich nun aus den Teillösungen auf den einzelnen Gebieten zusammen:

$$\hat{w} = \begin{cases} w_1, & \forall x \in \Omega_1 \\ w_2, & \forall x \in \Omega_2 \end{cases}, \quad w_i \in H^2(\Omega_i), \quad i = \{1, 2\}. \quad (24)$$

Die Teillösungen w_1 und w_2 erfüllen die Teilprobleme (22) und (23). Damit die zusammengesetzte Lösung \hat{w} auf dem ganzen Gebiet das ursprüngliche Problem (21) erfüllt, d.h. $N(\hat{w}, \varphi) = \int_{\Omega} \varphi h dx$, müssen weitere Forderungen an die Lösung gestellt werden. Durch partielle Integration von $N(\hat{w}, \varphi)$ und Aufteilen der Integrale auf die jeweiligen Teilgebiete ergibt sich nun mittels partieller Integration:

$$N(\hat{w}, \varphi) = \int_{\Omega} \hat{w}_t \cdot \varphi dx - \int_{\Omega} f(\hat{w}) \cdot \nabla \varphi dx + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla \hat{w} \cdot \nabla \varphi dx \quad (25)$$

$$= \int_{\Omega_1} w_{t,1} \cdot \varphi dx + \int_{\Omega_2} w_{t,2} \cdot \varphi dx + \int_{\Omega_1} \nabla \cdot f(w_1) \varphi dx + \int_{\Omega_2} \nabla \cdot f(w_2) \varphi dx \quad (26)$$

$$- \int_{\Gamma} \varphi (f(\hat{w}^-) \cdot \vec{n}^+ + f(\hat{w}^+) \cdot \vec{n}^-) d\sigma - \varepsilon \int_{\Omega_1} \Delta w_1 \varphi dx - \varepsilon \int_{\Omega_2} \Delta w_2 \varphi dx$$

$$+ \int_{\Gamma} \varphi \varepsilon (\nabla \hat{w}^- - \nabla \hat{w}^+) \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$= \int_{\Omega} \varphi h dx - \int_{\Gamma} \varphi (f(\hat{w}^-) \cdot \vec{n}^+ + f(\hat{w}^+) \cdot \vec{n}^-) d\sigma + \varepsilon \int_{\Gamma} \varphi (\nabla w^- - \nabla w^+) \cdot \vec{n} d\sigma \quad (27)$$

Zur besseren Lesbarkeit wurde auf die Randbedingung (20) in dieser Formulierung verzichtet. Das Problem $N(\hat{w}, \varphi)$ ist nur dann äquivalent zu dem ursprünglichen Problem $N(w, \varphi)$, wenn die zusätzlichen Terme auf dem Rand Γ verschwinden:

$$- \int_{\Gamma} \varphi (\varepsilon (\nabla \hat{w}^- - \nabla \hat{w}^+) \cdot \vec{n} - f(\hat{w}^-) \cdot \vec{n}^+ - f(\hat{w}^+) \cdot \vec{n}^-) d\sigma = 0. \quad (28)$$

Wie im vorigen Abschnitt bezeichnen die Größen mit \cdot^\pm den entsprechenden Grenzwert, d.h. in diesem einfachen Fall $\hat{w}^+ = w_1$ und $\hat{w}^- = w_2$ auf dem Rand Γ . Die Formulierung

$$w_{1,t} + \nabla \cdot f(w_1) - \varepsilon \Delta w_1 = h \quad \forall x \in \Omega_1, \quad w_1 = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \quad w_1 = \lambda \quad \forall x \in \Gamma \quad (29)$$

$$w_{2,t} + \nabla \cdot f(w_2) - \varepsilon \Delta w_2 = h \quad \forall x \in \Omega_2, \quad w_2 = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \quad w_2 = \lambda \quad \forall x \in \Gamma \quad (30)$$

$$\varepsilon \llbracket \nabla w \rrbracket - \llbracket f(w) \rrbracket = 0, \quad \forall x \in \Gamma \quad (31)$$

ist nun äquivalent zu der ursprünglichen Formulierung (19). Der Sprungoperator $\llbracket \cdot \rrbracket$ ist definiert als:

$$\llbracket w \rrbracket = w^- \vec{n} - w^+ \vec{n}. \quad (32)$$

Die Teillösungen w_i sind offensichtlich nur über die Kante Γ miteinander gekoppelt. Daraus folgt, dass die Gleichungen so umformuliert werden können, dass die w_i nur von dem λ auf den Kanten abhängt und sich daraus bestimmen lassen. Das wird in dem folgenden Abschnitten durchgeführt.

4.2 Diskretisierung der nichtlinearen Konvektions-Diffusionsgleichung

Zur Diskretisierung wird die Gleichung in eine sogenannte "gemischte Form" umgeschrieben. Dazu wird die Hilfsgröße σ eingeführt und man erhält ein System von Gleichungen in denen nur erste Ableitungen auftreten:

$$\sigma = \varepsilon \nabla w \quad \forall x \in \Omega \quad (33)$$

$$\nabla \cdot (f(w) - \sigma) = h \quad \forall x \in \Omega \quad (34)$$

$$w = g \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (35)$$

Die Funktionenräume für die Test- und Ansatzfunktionen für w_h , σ_h und λ_h auf den Kanten sind:

$$V_h := \{f \in L^2(\Omega) \mid f|_{\Omega_k} \in \Pi^p(\Omega_k) \quad \forall k = 1, \dots, N\}^m \quad (36)$$

$$H_h := \{f \in L^2(\Omega) \mid f|_{\Omega_k} \in \Pi^{p+1}(\Omega_k) \quad \forall k = 1, \dots, N\}^{d-m} \quad (37)$$

$$M_h := \{f \in L^2(\Omega) \mid f|_{\Gamma_k} \in \Pi^{p+1}(\Gamma_k) \quad \forall k = 1, \dots, \hat{N}\}^m. \quad (38)$$

Dabei ist $d \in \{1, 2, 3\}$ die Raumdimension und m die Anzahl der Unbekannten, z.B. $m = 4$ für die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen (vier Unbekannte: Dichte, Impuls in x -Richtung, Impuls in y -Richtung, Energie).

Durch Multiplikation der Gleichungen (33), (34) und der zugehörigen Gleichung auf den Kanten (28) mit den Testfunktionen $(\tau_h, \varphi_h, \mu_h) \in H_h \times V_h \times M_h$, partieller Inte-

gration und Aufteilung in die Teilgebiete Ω_k ergibt sich folgendes Verfahren:

$$\sum_{k=1}^N \left(\int_{\Omega_k} \sigma_h \cdot \tau_h + \varepsilon w_h \nabla \cdot \tau_h dx - \varepsilon \int_{\Omega_k \setminus \partial\Omega} \lambda_h \tau_h^- \cdot \vec{n} d\sigma - \varepsilon \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} g \tau_h^- \cdot \vec{n} d\sigma \right) = 0 \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\int_{\Omega_k} (w_h)_t \cdot \varphi_h dx - \int_{\Omega_k} f(w_h) \cdot \nabla \varphi_h dx + \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} \varphi_h^- (f(\lambda_h) \cdot \vec{n} - \alpha(\lambda_h - w_h^-)) d\sigma \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \varphi_h^- f(g) \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Omega_k} \nabla \cdot \sigma_h \varphi_h dx \right) = \int_{\Omega} h \varphi_h dx \\ \int_{\Gamma_0} \mu_h (\sigma_h^- \cdot n - \sigma_h^+ \cdot \vec{n} + \alpha(2\lambda_h - w_h^- - w_h^+)) d\sigma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \mu_h (\lambda_h - g) d\sigma = 0 . \end{aligned} \quad (41)$$

Hier bezeichnet Γ die Menge aller Kanten der Gebiete Ω_k und Γ_0 die Menge der Kanten, die nicht mit dem Rand des Gebiets $\partial\Omega$ übereinstimmen. Für den analytischen Fluss wurde bereits ein numerischer Fluss eingesetzt (vgl. Abschnitt 3). Es ist ein modifizierter Lax-Friedrichs-Fluss:

$$f(u) \cdot \vec{n} \approx f^{num}(\lambda, v, \vec{n}) := f(\lambda) \cdot \vec{n} - \alpha(\lambda - v), \quad \lambda = \frac{u + v}{2} . \quad (42)$$

Man hat nun ein Gleichungssystem mit einer zusätzlichen Gleichung (41) und dadurch zusätzliche Unbekannte λ_h , die bestimmt werden müssen. Dies ist dennoch von Vorteil, denn man kann das Gleichungssystem nun umschreiben, so dass dieses nur für die hybride Variable λ_h global gelöst werden muss. Anschließend kann man die Größen w_h und σ_h aus der hybriden Variable λ_h auf den Teilgebieten Ω_k unabhängig voneinander bestimmen. Der Aufwand ist insgesamt höher, aber das zu lösende Gleichungssystem ist kleiner als das ursprüngliche Gleichungssystem ohne Hybridisierung. Dadurch verringert sich der benötigte Speicherbedarf, der eine wichtige Grenze für die Komplexität und Größe von Problemen ist, die untersucht werden können.

Die Reduktion der Freiheitsgrade wird durch lokale Lösungstechniken erreicht. Cockburn et al. [1] haben gezeigt, wie dieses Verfahren auf hybride, gemischte Verfahren angewandt werden kann. Man definiert lokale Löser $(w_h(\lambda), \sigma_h(\lambda))$ für gegebenes λ als:

$$\int_{\Omega_k} \sigma_h^k \cdot \tau_h + \varepsilon w_h^k \nabla \cdot \tau_h dx - \varepsilon \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} \lambda_h \tau_h^- \cdot \vec{n} d\sigma - \varepsilon \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} g \tau_h^- \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_k} f(w_h^k) \cdot \nabla \varphi_h dx + \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} \varphi_h^- (f(\lambda_h) \cdot \vec{n} - \alpha(\lambda_h - w_h^k)) d\sigma \\ + \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \varphi_h^- f(g) \cdot \vec{n} d\sigma - \int_{\Omega_k} \nabla \cdot \sigma_h^k \varphi_h dx = \int_{\Omega} h \varphi_h dx . \end{aligned} \quad (44)$$

Zur besseren Lesbarkeit wurde auf das Argument (λ) verzichtet. Nun definiert man die Lösung als $w_h(\lambda) = \sum_{k=1}^N w_h^k(\lambda)$ und $\sigma_h(\lambda) = \sum_{k=1}^N \sigma_h^k(\lambda)$, so dass das ursprüngliche Verfahren umgeschrieben werden kann in:

Definition 1 (Hybrides System) *Finde ein $\lambda_h \in M_h$, so dass $\forall \mu_h \in M_h$:*

$$\begin{aligned} \widehat{N}_1(\lambda_h, \mu_h) := & \int_{\Gamma_0} \mu_h (\sigma_h(\lambda_h)^- \cdot n - \sigma_h(\lambda_h)^+ \cdot n \\ & + \alpha(2\lambda_h - w_h(\lambda_h)^- - w_h(\lambda_h)^+) d\sigma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \mu_h \lambda_h d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

Dieses System hat eine, in Abhängigkeit des verwendeten Polynomgrads p und der Raumdimensionen d , erheblich kleinere Anzahl von Unbekannten ($\mathcal{O}(p^{d-1})$) im Vergleich zu dem ursprünglichen Problem ($\mathcal{O}(p^d)$). Die Größe der Jacobischen ist sogar um zwei Ordnungen geringer ($\mathcal{O}(p^{2d-2})$ statt $\mathcal{O}(p^{2d})$), wodurch das vorgestellte Verfahren insbesondere bei Verwendung von Polynomen mit hoher Ordnung von Interesse ist.

Die Größenreduktion des Gleichungssystems kann auch über die sogenannte "statische Kondensation" gezeigt werden. Die Diskretisierung der linearisierten Gleichungen (39)-(41) führt zu einem Gleichungssystem der Form:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ W \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ K \\ L \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Die Matrizen A bis I sind Blockmatrizen der diskretisierten Operatoren der Gleichungen, die Matrizen J - L sind Vektoren der entsprechenden rechten Seiten und die Vektoren Σ , W und Λ beinhalten die zu bestimmenden Freiheitsgrade für σ_h , w_h und λ_h . Das Gleichungssystem kann in die Systeme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ F \end{pmatrix} \Lambda \quad (47)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Sigma \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C \\ F \end{pmatrix} \Lambda \right) \quad (48)$$

und

$$(G \ H) \begin{pmatrix} \Sigma \\ W \end{pmatrix} + I\Lambda = L \quad (49)$$

zerlegt werden. Durch Einsetzen von (48) in (49) erhält man schließlich das hybridisierte System:

$$\left(I - (G \ H) \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C \\ F \end{pmatrix} \right) \Lambda = L - (G \ H) \begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} J \\ K \end{pmatrix} \quad (50)$$

Dies ist wiederum das reduzierte Gleichungssystem in dem nur die hybriden Variablen bestimmt werden müssen. Die Größen Σ und W auf den Gebieten ergeben sich aus Gleichung 48 und können für jedes Element unabhängig voneinander berechnet werden.

k	a_0	a_1	a_2	a_3	Ordnung
1	1	-1			1
2	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$		2
3	$\frac{11}{6}$	-3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$	3

Tabelle 1: Koeffizienten verschiedener BDF k -Verfahren.

5 Implizite Zeitintegrationsverfahren

In der bisherigen Vorstellung des hybriden, gemischten Verfahrens wurden zur besseren Lesbarkeit stationäre Probleme ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$) behandelt. Allerdings sind auch instationäre Probleme von großem Interesse. Zur Simulation der instationären Navier-Stokes-Gleichungen benötigt man ein Zeitintegrationsverfahren. Es gibt explizite und implizite Verfahren. Während explizite Verfahren auf Basis bereits berechneter Daten, die Lösung zum neuen Zeitpunkt bestimmen, muss man bei impliziten Verfahren ein Gleichungssystem lösen, da Informationen des zu bestimmenden Zeitschritts miteinfließen. Daraus resultiert ein höherer Aufwand des Verfahrens, aber implizite Verfahren haben in der Regel bessere Stabilitätseigenschaften als explizite Verfahren [2].

Für das hybride, gemischte Verfahren werden implizite Mehrschrittverfahren der Rückwärtsdifferenzenmethoden (engl. backward differentiaton formula), kurz BDF-Methoden, verwendet. BDF-Methoden werden aufgrund ihrer guten Stabilitätseigenschaften oft bei sogenannten steifen Systemen verwendet.

Die BDF-Verfahren lösen ein Anfangswertproblem der Form:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, T] \quad (51)$$

$$y(t_0) = y^0. \quad (52)$$

Auch das Problem für das hybride, gemischte Verfahren lässt sich so schreiben und mit dem BDF-Verfahren lösen. Die linke Seite wird nun über ein Lagrange-Interpolationspolynom angenähert und man erhält die allgemeine Form der k -Schritt-BDF-Methode

$$\sum_{l=0}^k a_l y^{n+1-l} = \Delta t f(t^{n+1}, y^{n+1}) \quad (53)$$

mit der Zeitschrittweite Δt , dem Zeitindex n und Koeffizienten a_l . Hier ist $n + 1$ der Zeitpunkt zu dem die Lösung approximiert wird. Koeffizienten für verschiedene k -Schritt-BDF-Methoden sind in Tabelle 1 dargestellt. Eine k -Schritt-BDF-Methode ist k ter-Ordnung konsistent. Für den Fall $k = 1$ ergibt sich das implizite Euler Verfahren. Zur Lösung des Problems werden k Startwerte y^{n-k}, \dots, y^n benötigt. Das ist zum Beginn der Simulation für Verfahren mit $k > 1$ problematisch, da nur die Anfangswerte y^0 bekannt sind, aber nicht zu vorherigen Zeitpunkten. Genaue Startwerte zu den anderen Zeiten $n - k, \dots, n - 1$ sind nötig, um die Genauigkeit des Verfahrens zu erhalten. Werden die Startwerte schon mit einem Fehler, der größer als die Konsistenzordnung ist, initialisiert, so wird der Fehler mit über die Zeit mittransportiert. Da Verfahren mit höherer Ordnung aufwendiger werden, ist dies zu vermeiden. Um Startwerte mit ausreichend hoher

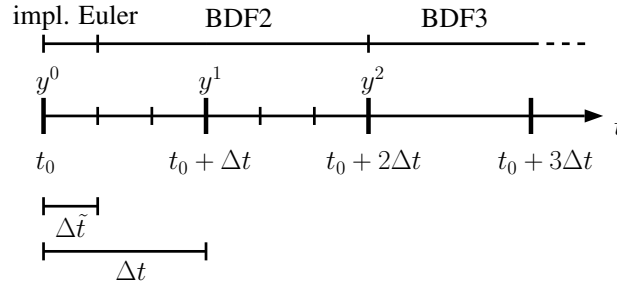


Abbildung 4: Initialisierung des BDF3-Verfahrens mittels einem impliziten Euler-Schritts und anschließenden Zeitschritte mit dem BDF2-Verfahren.

Genauigkeit zu erhalten, beginnt man mit Verfahren geringerer Ordnung und entsprechend verkleinerter Zeitschrittweite, bis man genug Startwerte bestimmt hat. Für das BDF3-Verfahren sieht das Vorgehen wie folgt aus:

1. Bestimme Zeitschrittweite $\Delta \tilde{t}$, so dass $(\Delta \tilde{t})^2 < (\Delta t)^3$.
2. Führe einen impliziten Euler-Schritt mit Zeitschrittweite $\Delta \tilde{t}$ aus. Das impl. Euler-Verfahren ist im ersten Schritt zweiter Ordnung konsistent.
3. Führe anschließend so viele BDF2-Schritte mit Zeitschrittweite $\Delta \tilde{t}$ aus, bis $t_0 + 2\Delta t$ erreicht wurde

Somit erhält man Startwerte für y^1 und y^2 mit ausreichender Genauigkeit, da sowohl das BDF2- sowie das impl. Euler-Verfahren (im ersten Schritt) von zweiter Ordnung genau sind. Für Verfahren höherer Ordnung kann äquivalent vorgegangen werden, wobei BDF-Verfahren mit $k \geq 7$ nicht verwendet werden, da diese nicht konvergieren.

6 Simulationsergebnisse

Zur Überprüfung der Implementierung und der Verifizierung der Ordnung des Verfahrens wurden drei verschiedene Simulationen durchgeführt. Zwei Testfälle beschränken sich auf einfachere Probleme, die lineare Konvektions-Diffusionsgleichung und die Burgersgleichung. Für beide Fälle lässt sich eine analytische Lösung angeben, so dass die Konvergenzordnung bestimmt werden kann. Der dritte Testfall ist die Umströmung eines Zylinders für die die Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Es existiert keine analytische Lösung, aber es kann mit experimentellen Daten verglichen werden.

Der Approximationsfehler setzt sich nun aus dem örtlichen Fehler und dem zeitlichen Fehler zusammen. Damit die Konvergenz nicht durch einen zu großen örtlichen oder zeitlichen Fehler verschlechtert wird, muss zu dem gewählten Polynomgrad p ein ausreichend genaues Zeitintegrationsverfahren bzw. eine ausreichend kleine Zeitschrittweite gewählt werden. Für den Polynomgrad p kann man eine Konvergenzordnung von $p + 1$ für w_h und maximal $p + 2$ für σ_h erwarten. Da man aufgrund der konvektiven Terme eine

Stabilisierung einführen muss, ist in den hier verwendeten Testfällen davon auszugehen, dass die Konvergenzordnung von σ_h etwa $p + 1$ entspricht. Demzufolge wird für $p = 0$ das implizite Euler-Verfahren, für $p = 1$ das BDF2-Verfahren etc. zur Zeitintegration verwendet. Weitere Informationen zu den durchgeführten Simulationen finden sich in Schütz et al. [9].

6.1 Lineare Konvektions-Diffusionsgleichung

Der erste Testfall wurde von Nguyen et al. [6] untersucht. Es wird die skalare, lineare Konvektions-Diffusionsgleichung auf einem zweidimensionalen Gebiet $\Omega := [-0.5, 0.5]^2$ ohne Quellterm ($g = 0$) betrachtet. Der konvektive Fluss wird zu $f(w) = (-4y, 4x)^2$ und der diffusive Fluss zu $f_v(w, \nabla w) = 0.1\nabla w$ gesetzt (vgl. Gleichung (6)). In der Nähe des Ursprungs ist der konvektive Fluss klein und das Problem entsprechend diffusionsdominiert. Mit wachsender Entfernung vom Ursprung wird das Problem mehr und mehr konvektionsdominiert. Die Anfangsbedingung wird so gewählt, dass sich eine mehrdimensionale Gaußverteilung als Lösung ergibt. Wie man in den Abbildungen 5 erkennt, wird für w_h und σ_h die Konvergenzordnung $p + 1$ erreicht. Das entspricht den Erwartungen.

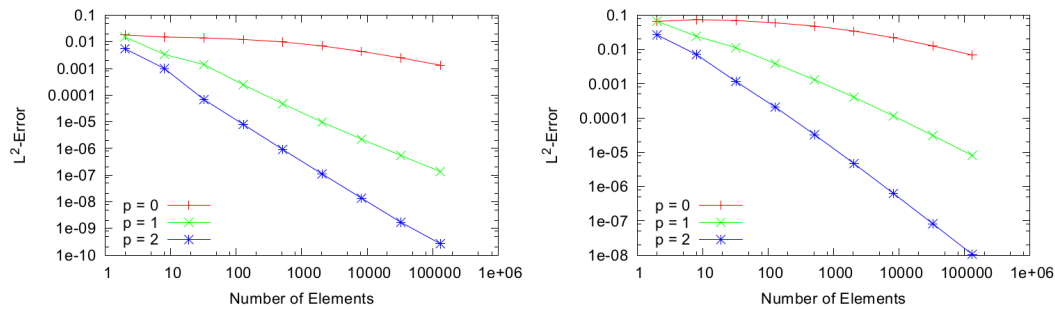


Abbildung 5: Konvergenz für die lineare Konvektions-Diffusionsgleichung: w_h Konvergenz (links) und σ_h Konvergenz (rechts)

6.2 Burgersgleichung

Der zweite Testfall ist die zweidimensionale (viskose) Burgersgleichung mit dem konvektiven Fluss $f = (w^2, w^2)$ und dem viskosen Fluss aus dem vorherigen Testfall $f_v(w, \nabla w) = 0.1\nabla w$. Durch entsprechende Wahl des Quellterms g ist die analytische Lösung des Problems:

$$w(x, y, t) = e^{-t} \left(x + \frac{e^{10x} - 1}{1 - e^{10}} \right) \left(y + \frac{e^{10y} - 1}{1 - e^{10}} \right). \quad (54)$$

Auch hier wird wie erwartet eine Konvergenzordnung von $p + 1$ für w_h und σ_h erreicht (vgl. Abb. 6)

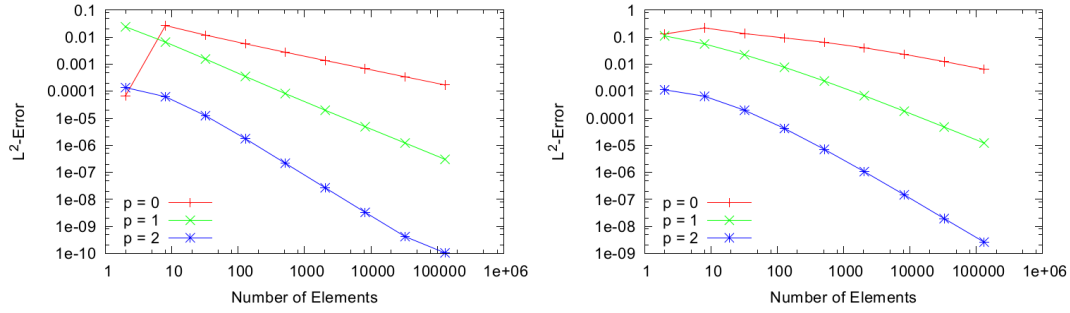


Abbildung 6: Konvergenz für die Burgersgleichung: w_h Konvergenz (links) und σ_h Konvergenz (rechts)

	BDF2			BDF3	
	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 5$	$\Delta t = 10$	$\Delta t = 5$	$\Delta t = 10$
$p = 1$	0.1898	0.1585	0.1205	0.1931	0.1519
$p = 2$	0.1898	0.1618	0.1255	0.1964	0.1543
$p = 3$	0.1898	0.1618	0.1255	0.1964	0.1543

Tabelle 2: Strouhalzahl für verschiedene Zeitschrittweiten und Polynomgrade.

6.3 Navier-Stokes-Gleichungen

Die Umströmung eines Zylinders lässt sich durch die Reynoldszahl $Re = \frac{\rho u d}{\eta}$ (ρ Dichte, u Geschwindigkeit, d charakteristische Länge *hier: Durchmesser des Zylinders* und η dynamische Viskosität) klassifizieren. Sie beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften. Wir betrachten in unserem Fall eine Reynoldszahl $80 < Re = 180 < 200$. In diesem Intervall löst Strömung oszillierend hinter dem Zylinder ab, was auch als Kármánschne Wirbelstraße bekannt ist. Die Wirbelstraße wird durch die Strouhal-Zahl $Sr = \frac{df}{U}$ (d Durchmesser des Zylinders, f Frequenz der ablösenden Wirbel und U Anströmgeschwindigkeit) charakterisiert. Die Machzahl wird wie in [9] beschrieben auf $Ma = \frac{u}{c} = 0.2$ (u Geschwindigkeit und c Schallgeschwindigkeit) gesetzt.

Das Rechengitter besteht aus 2916 Elementen und erfasst den Nachlauf bis zu dem zwanzigfachen des Zylinderdurchmessers d . Am Einlass wird eine Geschwindigkeit aufgeprägt und auf der Oberfläche gilt die Haftbedingung $u = 0$. Auf den restlichen Ränder des Gebietes gilt die charakteristische Fernfeld-Bedingung. Dort fließen Störungen der Strömung, wie z.B. die Wirbel, aus dem betrachteten Gebiet, ohne die restliche Strömung zu beeinflussen.

Neben der Strouhal-Zahl (vgl. Tabelle 2) wird auch der zeitlich gemittelte Widerstandsbeiwert c_w (vgl. Tabelle 3) bestimmt. Der Widerstandsbeiwert ist ein Maß für den Strömungswiderstand des Zylinders. Die Werte für den Widerstandsbeiwert und die Strouhal-Zahl nähern sich mit Verringerung der Zeitschrittweite und Erhöhung der räumlichen Ordnung an die Werte aus der Literatur an (vgl. Tabelle 4). Auch die symmetrische Ablösung der Wirbel lässt sich in Abbildung 7 beobachten. Die Zeitpunkte

	BDF2			BDF3	
	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 5$	$\Delta t = 10$	$\Delta t = 5$	$\Delta t = 10$
$p = 1$	1.3448	1.2449	1.0675	1.4604	1.4250
$p = 2$	1.3640	1.2486	1.0744	1.4972	1.4514
$p = 3$	1.3634	1.2490	1.0727	1.4795	1.4538

Tabelle 3: Zeitlich gemittelter Widerstandsbeiwert für verschiedene Zeitschrittweiten und Polynomgrade.

Experiment	c_w	Sr
Gopinath [3]	1.3406	0.1866
Henderson [4]	1.336	-
Williamson [10]	-	0.1919

Tabelle 4: Zeitlich gemittelter Widerstandsbeiwert und Strouhal-Zahl aus der Literatur.

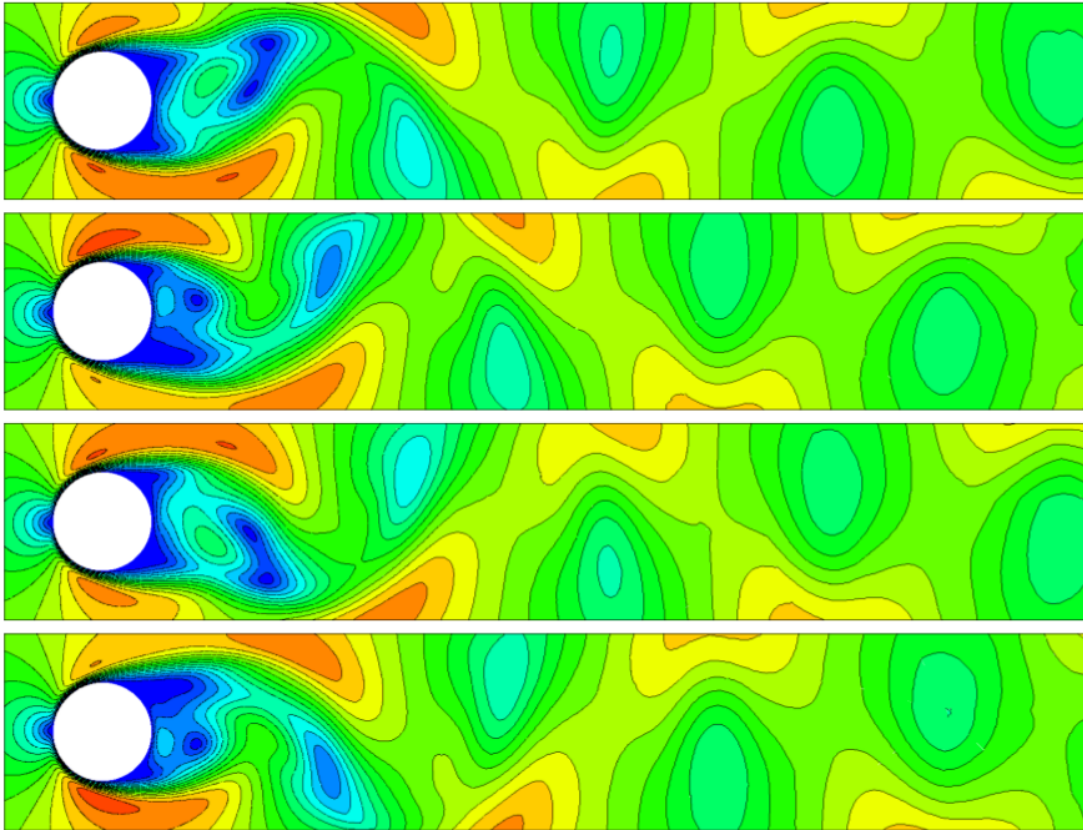


Abbildung 7: Machzahlverteilung der ablösenden Wirbel ($p = 3$, BDF2, $\Delta t = 1$)

sind so gewählt, dass die Symmetrie zwischen Bild 1 und 3 sowie 2 und 4 zu sehen sind.

Somit stimmen die Ergebnisse der Simulation gut mit den gemessenen Ergebnissen aus anderen Veröffentlichungen überein. Auch die Periodizität der Wirbelstraße wird genau wiedergegeben.

Literatur

- [1] Bernardo Cockburn and Jayadeep Gopalakrishnan. A characterization of hybridized mixed methods for second order elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, pages 283–301, 2002.
- [2] Wolfgang Dahmen and Arnold Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [3] A. Gopinath and A. Jameson. Application of the time spectral method to periodic unsteady vortex shedding. *AIAA Paper 2006-0449*, 2006.
- [4] R.D. Henderson. Details of the drag curve near the onset of vortex shedding. *Physics of Fluids*, 7, 1995.
- [5] Randall J. LeVeque. *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] N. Nguyen, J. Peraire, and B. Cockburn. An implicit high-order hybridizable discontinuous galerkin method for linear convection-diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 228:3232–3254, 2009.
- [7] Wolfgang Schröder. *Fluidmechanik*. Wissenschafts Verlag Mainz in Aachen, 2007.
- [8] Jochen Schütz and Georg May. A hybrid mixed method for the compressible navier-stokes-equations. *Journal of Computational Physics*, Eingereicht.
- [9] Jochen Schütz, Michael Woopen, and Georg May. A combined hybridized discontinuous galerkin / hybrid mixed method for viscous conservation laws. *AIMS Physics*, Eingereicht.
- [10] C.H.K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake annual review of fluid mechanics. *Annual review of fluid mechanics*, 28:477–539, 1996.