

ANALYSE UND ERWEITERUNG DES PARAMETERRAUMVERFAHRENS

Seminararbeit
von
B. Sc. Andreas Stump
Matrikelnummer 286441

Studienrichtung: Computational Engineering Science
Abgegeben am: 4. Februar 2015
Nummer: S1760
Betreuer: Dipl.-Ing Frank Schrödel

Die Arbeit ist nur zum internen Gebrauch bestimmt. Alle Urheberrechte liegen beim Verfasser und bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. Abel, Lehrstuhl und Institut für Regelungstechnik. Für den Inhalt wird keine Gewähr übernommen.

Ich versichere, diese Arbeit im Rahmen der am Institut üblichen Betreuung selbständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Quellen verwendet zu haben.

(Andreas Stump)

Aachen, 4. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Parameterraumverfahren	3
2.1.1	Reelle Wurzelgrenze	4
2.1.2	Infinite Wurzelgrenze	5
2.1.3	Komplexe Wurzelgrenze	6
2.1.4	Ein Beispiel des Parameterraumverfahrens	7
2.1.5	Wurzelgrenzen in der Zustandsraumdarstellung	9
2.2	Lyapunov Stabilität	11
2.3	Beobachtbarkeit	12
2.4	Steuerbarkeit	13
3	Parameterraumverfahren Erweitert	15
3.1	Analyse Schritt	15
3.2	Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeits-Mapping	16
3.2.1	Strukturelle Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit	16
3.2.2	Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsgrenzen	19
3.3	Berechnung des Parameterraums mit der Lyapunov Stabilität	21
4	Zusammenfassung und Ausblick	25
	Literaturverzeichnis	27

Einleitung

Seit der Erfindung der Dampfmaschine wird aktiv an der Entwicklung von Reglern, zur Steuerung dynamischer Systeme, geforscht. Viele Anwendungen kommen ohne Regler nicht mehr aus, für einige sind sie Sicherheitsrelevant oder erhöhen die Sicherheit von den Benutzern. Einer der erfolgreichsten Regler, der PID-Regler, wurde vor mehr als 50 Jahren erfunden und gehört zu den meist verbreiteten Reglervarianten. Bei kontinuierlichen Prozessen sind bis zu 97% der Regler vom Typ PID[4], dabei ist das Spektrum der Anwendungsgebiete riesig. PID-Regler werden im Bereich der Elektrotechnik, Verfahrenstechnik, Maschinenbau und Verkehrstechnik verwendet und finden auch in Bereichen wie der Biologie Anwendung[9].

Der PID-Regler erfüllt mit lediglich drei Reglerparametern die Ansprüche der meisten Systeme. Das einfache Konzept plus vorhandene Heuristiken wie zum Beispiel Ziegler und Nichols[9] machen ihn zu einer beliebten Wahl. Leider liefern diese Methoden keine Garantie für Stabilität, sodass bei etwa 30% die Stellwerte manuell eingegeben werden oder im manuellen Betrieb besser laufen[5]. Nur etwa ein Drittel der in der Industrie verwendeten Regler entsprechen den Leistungsvorstellungen[4]. Es besteht großer Bedarf an konzeptueller Reglerentwicklung. In dieser Arbeit werden die Grundlagen des Parameterraumverfahrens vorgestellt, durch die Lyapunov-Stabilität wird ein alternativer Ansatz, zur Berechnung des stabilen Parameterraums, vorgeschlagen und es werden die Grenzen der Regelbarkeit diskutiert.

Ziel des Parameterraumverfahrens, in Abschnitt 2.1, ist der robuste Reglerentwurf. Es wird der Raum der stabilen Reglerparameter, durch berechnen der Stabilitätsgrenzen des Regelkreises, gesucht. Die Methodik ist auch bei Ungenauigkeiten der Systemparameter anwendbar, siehe Abschnitt 3.1.

Anschließend wird, in Abschnitt 2.2, das Stabilitätskriterium von Lyapunov vorgestellt, welches eine Alternative zum Parameterraumverfahren bietet. Dieses Kriterium bietet die Möglichkeit, Stabilitätsanalysen nichtlinearer Systeme zu machen. Insbesondere wird ein Verfah-

ren beschrieben, mit dem der Raum stabiler Parameter für lineare Systeme berechnet werden kann. Anstatt die Stabilitätsgrenzen zu berechnen wird der Raum durch Ungleichungen beschrieben.

In Abschnitten 2.3 und 2.4, werden Anhand der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit die Grenzen der Regelbarkeit diskutiert und berechnet. Eine strukturelle Analyse des Systems 3.2.1 liefert hierfür weitere Ansätze.

Ziel ist es eine Zusammenfassung einiger Methoden zur Auslegung stabiler Regelstrecken zu formen. Dies wird speziell am Beispiel des PID-Reglers erläutert, wobei die Methoden auch auf andere Regler anwendbar sind.

Theoretische Grundlagen

Die Stabilität eines PID-Reglers hängt von der Wahl geeigneter Parameter ab. Mit Hilfe des Parameterraumverfahrens kann ein stabiler Parameterraum gefunden werden. Im Folgenden werden zwei Ansätze vorgestellt, die einen geeigneten Parameterraum definieren. In Abschnitt 2.1 wird das Parameterraumverfahren nach (Ackermann und Kaesbauer[2]) vorgestellt und im Abschnitt 2.2 wird die Lyapunov Stabilität zur Stabilitätsprüfung nichtlinearer Funktionen vorgestellt[7]. Anschließend werden die Konzepte der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit erläutert.

2.1 Parameterraumverfahren

Das in diesem Abschnitt behandelte Verfahren, beschreibt das Parameterraumverfahren für lineare zeitinvariante Systeme. Systeme mit Totzeit[6] und Ungenauigkeiten in den Parametern [1] können auch behandelt werden. Diese Systeme können durch eine Laplace-Transformation in die Übertragungsfunktion (2.1) umgewandelt werden, wobei $s \in \mathbb{C}$ teil der komplexen Zahlen ist.

$$G(s, q) = \frac{A(s, q)}{N(s, q)} \quad (2.1)$$

mit

$$\begin{aligned} A(s, q) &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_ms^m \\ N(s, q) &= n_0 + n_1s + n_2s^2 + \cdots + n_{n-1}s^{n-1} \end{aligned}$$

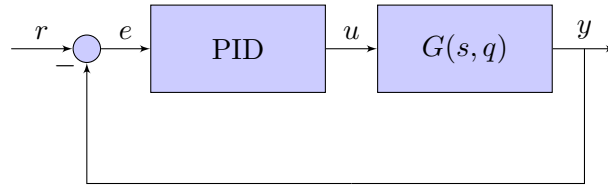


Abbildung 2.1: Regelkreis

Zusammen mit der Übertragungsfunktion des PID-Reglers (2.2) ergibt sich ein Regelkreis, der in Abbildung 2.1 dargestellt wird.

$$PID(s, k) = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{s} \quad (2.2)$$

Die Übertragungsfunktion des Regelkreises wird somit gegeben durch Gleichung (2.3).

$$G_R(s, k, q) = \frac{PID(s, k)G(s, q)}{1 + PID(s, k)G(s, q)} = \frac{G_0}{1 + G_0} \quad (2.3)$$

Um die Stabilität des Regelkreises zu gewähren, dürfen die Polstellen dieser Übertragungsfunktion keine positiven Realteile aufweisen. Die Stabilitätsgrenze liegt somit bei der charakteristischen Gleichung $1 + G_0 = 0$. Durch Multiplizieren mit dem Nenner von G_0 ergibt sich das Polynom (2.4).

$$P(s, k, q) = \underbrace{sN(s, q)}_{B(s, q)} + (K_I + K_P s + K_D s^2) A(s, q) = 0 \quad (2.4)$$

mit

$$B(s, q) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n \quad (2.5)$$

In diesem Fall ist $b_0 = 0$, da $B(s, q) = sN(s, q)$ und somit gilt $B(0, q) = 0$. Die Stabilität von $P(s, k, q)$ kann durch die drei Stabilitätsgrenzen, reelle, infinite und komplexe Wurzelgrenze beschrieben werden.

2.1.1 Reelle Wurzelgrenze

Die reelle Wurzelgrenze oder auch real root boundary (RRB) ist die Grenze für das Polynom (2.4) bei $s = 0$, siehe Abbildung 2.2.

$$P(0, k, q) = b_0 + K_I a_0 = 0 + K_I a_0 = 0$$

Somit wird für $a_0 \neq 0$, $K_I = 0$ als reelle Wurzelgrenze erhalten.

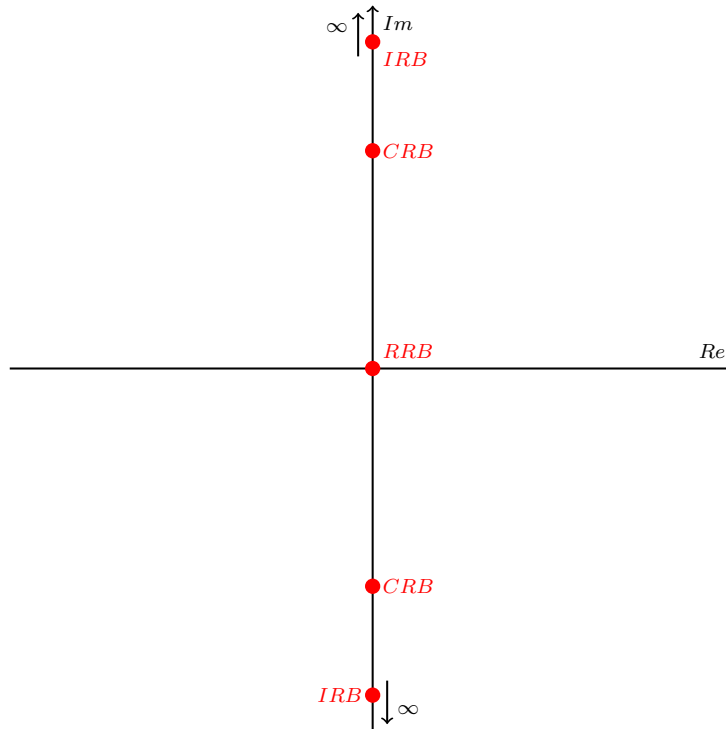


Abbildung 2.2: Position der reellen, infiniten und komplexen Wurzelgrenzen

2.1.2 Infinite Wurzelgrenze

Eine Nullstelle von $P(s, k, q)$ bei $s \rightarrow \infty$ ergibt die infinite Wurzelgrenze oder infinit root boundary (IRB), siehe Abbildung 2.2. Durch die Grenzbetrachtung $s \rightarrow \infty$, müssen nur die Terme höchster Ordnung berücksichtigt werden.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P(s, k, q) = \lim_{s \rightarrow \infty} b_n s^n + K_D a_m s^{m+2} = 0$$

Daraus folgt.

$$K_D = \lim_{s \rightarrow \infty} -\frac{b_n s^n}{a_m s^{m+2}}$$

Somit ergeben sich drei mögliche Grenzen für K_D .

$$K_D = \begin{cases} -\infty & \text{für } n > (m + 2) \\ 0 & \text{für } n < (m + 2) \\ -\frac{b_n}{a_m} & \text{für } n = (m + 2) \end{cases}$$

2.1.3 Komplexe Wurzelgrenze

Auf der imaginären Achse können sich komplex konjugierte Nullstellenpaare befinden. Diese haben keinen Realteil $s = j\omega$ und bilden die komplexe Wurzelgrenze oder complex root boundary (CRB), siehe Abbildung 2.2. In diesem Fall repräsentiert j die imaginäre Zahl.

$$P(j\omega, k, q) = B(j\omega, q) + \left(K_I + K_P j\omega + K_D (j\omega)^2 \right) A(j\omega, q) = 0$$

Die Polynome $A(j\omega, q)$ und $B(j\omega, q)$ können in Real- und Imaginärteil getrennt werden. Zur einfacheren Schreibweise, wird die Abhängigkeit der Polynome von q nicht explizit weiter erwähnt.

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= R_A(\omega) + jI_A(\omega) \\ B(j\omega) &= R_B(\omega) + jI_B(\omega) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Durch Multiplizieren der Terme ergibt sich folgendes Polynom.

$$\begin{aligned} P(j\omega, k) = 0 &= R_B(\omega) + jI_B(\omega) + R_A(\omega)K_I + jI_A(\omega)K_I + R_A(\omega)K_P\omega \\ &\quad - I_A(\omega)K_P\omega - R_A(\omega)K_D\omega^2 - jI_A(\omega)K_D\omega^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Damit Gleichung (2.7) gleich Null ist müssen sowohl die Real-, als auch die Imaginärteile verschwinden.

$$\operatorname{Re}(P(j\omega, k)) = R_B(\omega) + R_A(\omega) \left(K_I - K_D\omega^2 \right) - I_A(\omega)K_P\omega = 0 \quad (2.8)$$

$$\operatorname{Im}(P(j\omega, k)) = I_B(\omega) + I_A(\omega) \left(K_I - K_D\omega^2 \right) + R_A(\omega)K_P\omega = 0 \quad (2.9)$$

Aus Gleichung (2.9) folgt:

$$K_I - K_D\omega^2 = \frac{-R_A(\omega) - I_B(\omega)}{I_A(\omega)} \quad (2.10)$$

Durch einsetzen von Gleichung (2.10) in (2.8) folgt K_P in Abhängigkeit von ω .

$$K_P(\omega) = \frac{R_B(\omega)I_A(\omega) - R_A(\omega)I_B(\omega)}{\omega (R_A^2(\omega) + I_A^2(\omega))} \quad (2.11)$$

Durch Wahl eines K_P Parameters kann eine Menge $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R} : K_P(\omega) = K_P\}$ berechnet werden. Die Lösung der Gleichung (2.11) ist für Polynome hoher Ordnung nur numerisch möglich. Dies führt zu Problemen, wenn Nullstellen übersehen werden. Die komplexe Wurzelgrenze ergibt sich durch umformen von Gleichung (2.10) zu mehreren Geraden mit $\omega \in \Omega$.

$$K_I = K_D\omega^2 + \frac{-R_A(\omega) - I_B(\omega)}{I_A(\omega)}$$

Die erhaltenen Geraden teilen den K_D - K_I Raum, für ein gegebenes K_P , in mehrere Teilgebiete. Dies sagt jedoch noch nichts über die Stabilität dessen aus. Um dies zu überprüfen, kann zum Beispiel ein Punkt aus jedem Teilgebiet anhand der Funktion (2.4) getestet werden. Dies wird umso aufwendiger, desto mehr Geraden berechnet wurden. Falls alle Nullstellen negativ sind, ist das Teilgebiet stabil.

2.1.4 Ein Beispiel des Parameterraumverfahrens

Das folgende Beispiel beschreibt das Parameterraumverfahren anhand eines PT_2 -Übertragungsgliedes. Dieses Glied beschreibt häufig vorkommende Systeme in der Regelungstechnik, wie zum Beispiel den L-C-R Schwingkreis oder das Federpendel. Die Übertragungsfunktion des Gliedes ist.

$$G(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + T^2 s^2}$$

Analog zu Gleichung (2.4) ergibt sich, zusammen mit einem PID-Regler, ein Polynom der Form

$$\begin{aligned} P(s, k, d, T) &= s(1 + 2dT s + T^2 s^2) + K(K_I + K_P s + K_D s^2) \\ &= T^2 s^3 + (2dT + KK_D)s^2 + (1 + KK_P)s + KK_I \end{aligned}$$

Die reelle Wurzelgrenze ergibt sich aus $P(0, k, d, T) = KK_I = 0$, mit einem $K \neq 0$ zu $K_I = 0$. Um die infinite Wurzelgrenze zu berechnen, werden lediglich die Terme höchster Ordnung berücksichtigt. In diesem Fall bedeutet dies.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P(s, k, d, T) = \lim_{s \rightarrow \infty} T^2 s^3 = 0$$

Die Gleichung lässt sich nur lösen für $T = 0$. Für ein $T \neq 0$ gibt es keine Lösung und somit auch keine infinite Wurzelgrenze. Die komplexe Wurzelgrenze liegt auf der imaginären Achse, dafür muss der Realteil von s verschwinden.

$$\begin{aligned} P(j\omega, k, d, T) &= T^2(j\omega)^3 + (2dT + KK_D)(j\omega)^2 + (1 + KK_P)j\omega + KK_I \\ &= -T^2 j\omega^3 - (2dT + KK_D)\omega^2 + (1 + KK_P)j\omega + KK_I \end{aligned} \quad (2.12)$$

Folgende Gleichungen folgt nun durch trennen der imaginären und reellen Anteile.

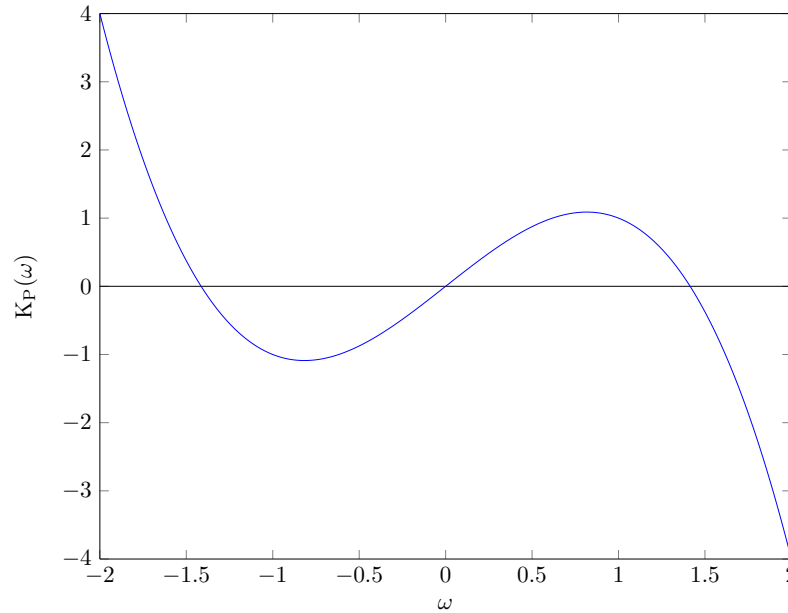


Abbildung 2.3: Schnittpunkte von K_P und ω für $K = 1$, $d = -0.5$, $T = 1$ und $K_P = 1$

$$\operatorname{Re}(P(j\omega, k, d, T)) = KK_I - (2dT + KK_D)\omega^2 \quad (2.13)$$

$$\operatorname{Im}(P(j\omega, k, d, T)) = (1 + KK_P)\omega - T^2\omega^3 \quad (2.14)$$

Durch Lösen der Gleichung des Imaginärteils (2.14) ergeben sich 2 Lösungen für ω , $\omega = 0$ und $\omega^2 = \frac{1+KK_P}{T^2}$. In Abbildung 2.3 ist dies beispielhaft für ausgewählte Parameter zu erkennen. Der Schnittpunkt der ω -Kurve mit $K_P = 1$ ergibt die gesuchten Lösungen. Wie die theoretische Lösung vermuten lässt schneidet die Kurve, $K_P = 1$, bei $\omega = 0$ und $\omega = \pm\sqrt{\frac{1+KK_P}{T^2}} = \pm\sqrt{2}$.

Die Lösungen werden benutzt um die Gleichung des Realteils (2.13) zu lösen, woraus sich zwei komplexe Wurzelgrenzen ergeben. Für $\omega = 0$ ergibt sich die Wurzelgrenze $K_I = 0$. Dies entspricht der bereits berechneten reellen Wurzelgrenze. Die zweite Wurzelgrenze ergibt eine Gerade im zweidimensionalen Parameterraum von K_D und K_I , bei einem Gewählten K_P .

$$K_I = \frac{2dT + KK_D}{K} \cdot \frac{1 + KK_P}{T^2}$$

Damit ergeben sich nur zwei effektive Wurzelgrenzen, diese werden beispielhaft in Abbildung 2.4 dargestellt. Es ergeben sich vier Teilbereiche, die auf ihre Stabilität geprüft werden müssen. Dafür werden Parameter aus den Teilbereichen genommen und in die Funktion (2.12) eingesetzt. Der Bereich ist stabil, wenn die Wurzeln der Funktion keinen positive Realteil aufweisen.

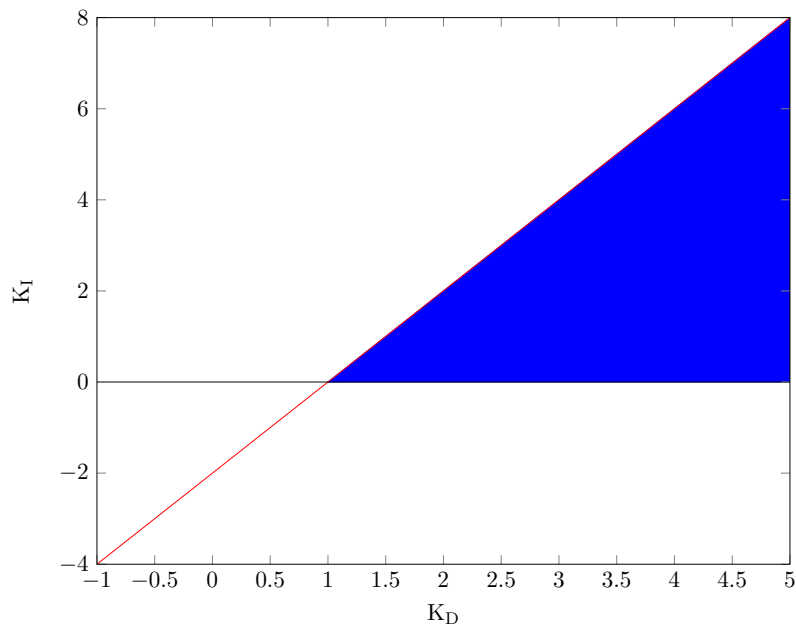


Abbildung 2.4: Stabile Parameterraum für $K = 1$, $d = -0.5$, $T = 1$ und $K_P = 1$

2.1.5 Wurzelgrenzen in der Zustandsraumdarstellung

Ein lineares zeitinvariantes System hat in der Zustandsraumdarstellung folgende Form.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.15)$$

Je nach Anzahl der Ein- n und Ausgänge k ergeben sich Matrizen der Dimensionen $A^{m \times m}$, $B^{m \times n}$, $C^{k \times m}$ und $D^{k \times n}$. Ein single input, single output (SISO) System $n = k = 1$, hat die Zustandsraumgleichung,

$$\dot{x} = Ax + bu$$

welche durch eine Geeignete Zustandsreglermatrix $u = -kx = -(k_1 \ k_2 \ \dots \ k_m)x$, wie in Abbildung 2.5 geregelt werden kann. Die Zustandsraumgleichung kann in folgende Form gebracht werden.

$$\dot{x} = Ax - bkx = (A - bk)x \quad (2.16)$$

Wird Gleichung (2.16) in der Regelungsnormalform[9] betrachtet, folgt:

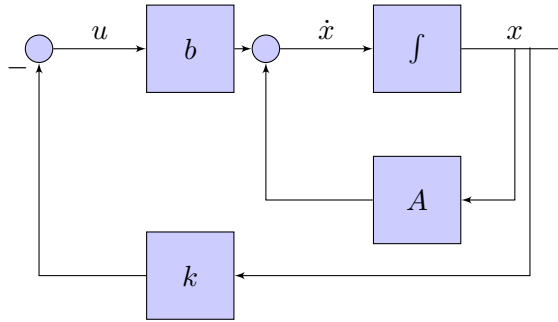


Abbildung 2.5: Zustandsraumdarstellung eines SISO-LTI Systems

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{m-1} \\ \dot{x}_m \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{m-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{m-1} & k_m \end{pmatrix} \right)}_{A_k} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{pmatrix}$$

mit

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 - k_1 & -a_1 - k_2 & -a_2 - k_3 & \dots & -a_{m-1} - k_m \end{pmatrix}$$

Die Stabilitätsgrenzen von A_k können durch das charakteristische Polynom (2.17) ermittelt werden.

$$\det(A_k - sI) = s^m + a_{m-1}k_m s^{m-1} + \dots + (a_1 + k_2)s + a_0 + k_1 = 0 \quad (2.17)$$

Durch Anwenden der Kriterien der Wurzelgrenzen auf das charakteristische Polynom folgen die Stabilitätsgrenzen analog zu Abschnitten 2.1.1, 2.1.2 und 2.1.3. Aus $s = 0$ ergibt sich die reelle Wurzelgrenze zu $k_1 = -a_0$. Eine infinite Wurzelgrenze existiert nicht, da für das gegebene charakteristische Polynom bei $s \rightarrow \infty$ keine Nullstelle existiert. Die komplexe Wurzelgrenze ist im generellen Fall schwer zu berechnen. Durch Substitution von s durch $j\omega$ in der Funktion (2.17) folgt ein komplexes Polynom der Ordnung m . Aus dem Fundamentalsatz der Algebra ist bekannt, dass Polynome m -ten Grades bis zu m komplexe Nullstellen haben. Als Beispiel wird ein System mit $m = 3$ berechnet. Das charakteristische Polynom vereinfacht sich zu.

$$-j\omega^3 - (a_2 + k_3)\omega^2 + (a_1 + k_2)j\omega + a_0 + k_1 = 0$$

Da der Imaginärteil, sowie der Realteil, verschwinden müssen folgt

$$\begin{aligned} k_2 &= \omega^2 - a_1 \\ k_1 &= (a_2 + k_3)\omega^2 - a_0 \end{aligned}$$

Diese einfache Berechnung ist bei Systemen höherer Ordnung nicht mehr möglich. Somit müssen andere Wege zur Berechnung von Stabilitätsgrenzen gefunden werden.

2.2 Lyapunov Stabilität

Die Lyapunov Stabilität ist eine Alternative zur traditionellen Stabilitätsanalyse. Sie bietet die Möglichkeit sowohl lineare, als auch nichtlineare Systeme auf Stabilität zu untersuchen [7]. Um dies zu tun, muss eine Lyapunov Funktion gefunden werden. Diese ist für den linearen Fall gegeben. Daher bietet sich folgende Methode als alternative zum Parameterraumverfahren an.

Man betrachte ein System der Form $\dot{x} = f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit Ruhelage $x_r = 0$ und $f(x_r) = 0$. Eine Lyapunov Funktion $V(x)$, $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \in \mathbb{R}^n$ hat folgende Eigenschaften.

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{0\} \quad (2.18)$$

$$V(x) = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad (2.19)$$

$$\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D \quad (2.20)$$

Die Funktion $V(x)$ ist aufgrund der Eigenschaften (2.18) und (2.19) positiv-definit. Die Eigenschaft (2.20) nennt sich negativ-semi-definit. Falls gilt $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in D \setminus \{0\}$ und $\dot{V}(x) = 0$ für $x = 0$, ist $\dot{V}(x)$ negativ definit und das System verhält sich asymptotisch stabil. Asymptotische Stabilität garantiert, dass sich für $t \rightarrow \infty$, x dem Ruhezustand $f(x(t)) = 0$ nähert. Wird eine Lyapunov Funktion gefunden, so ist das System stabil. Der Umkehrschluss gilt jedoch nicht. Falls keine Lyapunov Funktion gefunden wird, kann keine Aussage über die Stabilität des Systems gemacht werden.

Für ein lineares System $\dot{x} = Ax$ kann durch den Ansatz $V(x) = x^T P x$ eine Funktion gefunden werden, die (2.18) und (2.19) entspricht, falls P positiv definit ist. Dies ergibt folgende Ableitung der Funktion.

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
 &= (Ax)^T P x + x^T P A x \\
 &= x^T (A^T P + P A) x \\
 -Q &= (A^T P + P A)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Lässt sich eine positiv definite Matrix P finden, sodass Q positiv-semi-definit ist, gilt das System als Lyapunov Stabil. In diesem Fall kann Q frei gewählt werden, sodass der Q positiv-semi-definit keine Einschränkung darstellt. Es lässt sich auch einfach eine Matrix finden die positiv-definit ist, zum Beispiel die Einheitsmatrix, sodass asymptotische Stabilität gewährleistet wird. Die Gleichung (2.21) lässt sich nun für P Lösen. Durch, zum Beispiel, eine Cholesky Zerlegung[3] oder das Hurwitzkriterium[9] lässt sich überprüfen ob P positiv-definit ist[8].

Ein Beispiel für ein nichtlineares System ist gegeben durch $\dot{x} = -x^3$. Die Funktion $V(x) = x^2$ ist offensichtlich positiv definit. Durch ableiten der Funktion kann die Stabilität des Systems gezeigt werden.

$$\dot{V}(x) = 2x\dot{x} = -2x^4 \leq 0$$

Da gilt $\dot{V}(x) = 0$ nur für $x = 0$ (negativ definit), ist das System asymptotisch Stabil.

2.3 Beobachtbarkeit

Das System (2.15) ist vollständig Beobachtbar, wenn, bei bekannten Eingängen $u(t)$ und Matrizen A und C , $x(t_0)$ in endlicher Zeit t_e , durch Beobachtung von $y(t)$, in der Zeit $t_0 \leq t \leq t_e$, bestimmt werden kann. Nach Kalman[10] ist ein System vollständig Beobachtbar, wenn die Matrix Q_b (2.22) vollen Rang hat.

$$Q_B = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{m-1} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

Die Matrix Q_B hat die Dimensionen $(km \times m)$. Vollständige Beobachtbarkeit erfordert $\text{Rang}(Q_B) = m$. Im Spezialfall $k = 1$ gilt $\det(Q_B) \neq 0$.

2.4 Steuerbarkeit

Das System (2.15) ist Steuerbar, wenn $x(t_0)$ in endlicher Zeit $t_0 \leq t \leq t_e$ durch eine geeignete Wahl der Eingänge $u(t)$ in beliebiges $x(t_e)$ überführt werden kann. Das Kriterium zur Überprüfung vollständiger Steuerbarkeit, nach Kalman[10], ist ähnlich dem der vollständigen Beobachtbarkeit.

$$Q_S = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{m-1}B \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Die Matrix Q_S (2.23) hat die Dimension $(m \times mn)$ und ist vollständig Steuerbar falls gilt $\text{Rang}(Q_S) = m$. Für $n = 1$ gilt $\det(Q_S) \neq 0$.

Parameterraumverfahren Erweitert

3.1 Analyse Schritt

Im Kapitel 2 wird das Gebiet der stabilen Reglerparameter gefunden. Es ist jedoch nicht klar, ob diese Parameter das Gebiet Q etwaiger Abweichungen der Systemparameter q abdecken. Um dies zu ermitteln werden die bekannten Wurzelgrenzen analog zu Abschnitt 2.1.1, 2.1.2 und 2.1.3 angewendet. Das Polynom (2.4) bestimmt weiterhin die Stabilität des Systems, mit konstanten Reglerparametern k .

$$P(s, q) = B(s, q) + D(s, q)$$

mit

$$\begin{aligned} D(s, q) &= (K_I a_0) + (K_I a_1 + K_P a_0)s + \dots + (K_D a_m)s^{m+2} \\ &= d_0(q) + d_1(q)s + \dots + d_{m+2} s^{m+2} \end{aligned}$$

Die reelle Wurzelgrenze bei $s = 0$ verlangt, dass $P(0, q) = b_0(q) + d_0(q) = 0 + d_0(q) = 0$ ist. Hierdurch ergibt sich die erste Stabilitätsgrenze $d_0(q) = 0$. Um die infinite Wurzelgrenze zu berechnen wird das Verhalten des Polynoms bei $s \rightarrow \infty$ untersucht.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} P(s, q) = \lim_{s \rightarrow \infty} b_n(q)s^n + \underbrace{d_{m+2}(q)}_{=K_D a_m} s^{m+2} = 0$$

Durch umformen folgt:

$$-\frac{b_n(q)}{a_m(q)} = K_D \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^{m+2}}{s^n}$$

In Abhängigkeit von m und n ergeben sich somit folgende Stabilitätsgrenzen.

$$-\frac{b_n(q)}{a_m(q)} = \begin{cases} 0 & \text{für } n < (m+2) \\ \infty & \text{für } n < (m+2) \\ K_D & \text{für } n = (m+2) \end{cases}$$

Um die komplexe Wurzelgrenze zu berechnen ist es sinnvoll das Polynom in Real- und Imaginärteile zu zerlegen, analog zu (2.6). Daraus folgt.

$$P(j\omega, q) = R_B(\omega, q) + jI_B(\omega, q) + R_D(\omega, q) + jI_D(\omega, q)$$

Durch trennen der Real- und Imaginärteile, folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(P(j\omega, q)) &= R_B(\omega, q) + R_D(\omega, q) = 0 \\ \operatorname{Im}(P(j\omega, q)) &= I_B(\omega, q) + I_D(\omega, q) = 0 \end{aligned}$$

Um die Stabilitätsgrenzen zu finden müssen die Wurzeln dieser Polynome berechnet werden. Dies ergibt (ω, q) -Paare, welche die komplexen Wurzelgrenzen beschreiben.

3.2 Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeits-Mapping

3.2.1 Strukturelle Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit

Damit ein System geregelt werden kann, muss dieses vollständig Beobachtbar und Steuerbar sein. falls die nicht der Fall ist, muss es nicht an den Parametern des Systems liegen. Es gibt Systeme die aufgrund ihrer Struktur nicht Beobachtbar, beziehungsweise Steuerbar sind. Deswegen wird in diesem Abschnitt ein notwendiges Kriterium zur Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit vorgestellt, welches nur die Struktur des Systems berücksichtigt[10]. Als Beispiel dient eine Zustandsraumdarstellung der Form (2.15).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & b_{21} \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

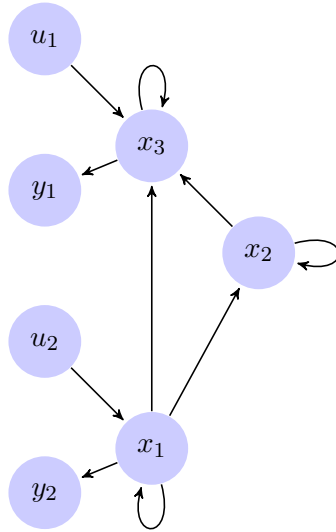


Abbildung 3.1: Strukturgraph von Q_0

Die Elemente der Matrizen, die unabhängig von Systemparametern gleich null sind werden durch eine 0 gekennzeichnet. Der Rest wird durch ein * markiert. Diese Elemente sind abhängig von den Systemparametern und können unter Umständen ebenfalls null sein. Daraus ergeben sich die Strukturmatrizen.

$$S_A = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad S_B = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad S_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wenn die Sternchen durch Einsen ersetzt werden $* \rightarrow 1$, folgt die Adjazenzmatrix Q_0 , welche den Strukturgraphen 3.1 beschreibt.

$$Q_0 = \begin{pmatrix} S_A & S_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ S_C & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein System gilt als Eingangsverbunden, wenn für jeden Zustandsknoten x_j ein Pfad existiert, der von einem beliebigen Eingang u_i zu dem Zustandsknoten führt. Pfade können dabei beliebig viele Kanten und Knoten beinhalten. Analog gilt ein System als Ausgangsverbunden, wenn jeder Zustandsknoten x_j durch einen Pfad mit mindestens einem Ausgangsknoten y_i verbunden werden kann. Damit ein System strukturell Beobachtbar und Steuerbar ist, muss es sowohl Eingangs-, als auch Ausgangsverbunden sein. Zusätzlich muss der strukturelle Rang 3.1 erfüllt werden.

$$\text{s-Rang} \begin{pmatrix} S_A & S_B \end{pmatrix} = n \quad \text{s-Rang} \begin{pmatrix} S_A \\ S_C \end{pmatrix} = n \quad (3.1)$$

Um den strukturellen Rang zu Überprüfen müssen so viele * wie möglich in unterschiedlichen Zeilen und Spalten gefunden werden. Im folgendem wird hierzu ein Algorithmus vorgeschlagen.

Require: $M = \begin{pmatrix} S_A & S_B \end{pmatrix}$ oder $M = \begin{pmatrix} S_A \\ S_C \end{pmatrix}$

```
1: rang ← 0
2: Stack ← NULL
3: vollerRang ← SRANG(rang, Stack, M, 1, 1)
4: function SRANG(rang, Stack, M, Zeile, Spalte)
5:   gefunden ← FINDE(Stack, M, Zeile, Spalte)
6:   if gefunden = True then
7:     if Zeile > rang then
8:       rang ← rang + 1
9:     end if
10:    if Zeile < min(M.Zeilen, M.Spalten) then
11:      SRANG(rang, Stack, M, Zeile + 1, 1)
12:    else
13:      return True
14:    end if
15:  else
16:    if Stack.empty then
17:      return False
18:    else
19:      (i, j) ← Stack.pop
20:      SRANG(rang, Stack, M, i, j + 1)
21:    end if
22:  end if
23: end function
24: function FINDE(Stack, M, Zeile, Spalte)
25:   for k ← Spalte to M.Spalten do
26:     if M(i, k) = * then
27:       Stack ← (i, k)
28:       return True
29:     end if
30:   end for
31:   return False
32: end function
```

Das im Beispiel gewählte System ist sowohl Eingangs-, als auch Ausgangsverbunden. Dies lässt sich anhand des Strukturgraphen 3.1 leicht überprüfen. Die Knoten x_1 , x_2 und x_3 sind

alle über mehr oder weniger Knoten und Kanten verbunden mit y_1 und somit Ausgangsverbunden. Dies wäre zum Beispiel nicht der Fall, wenn die Kante anstatt von x_2 zu x_3 in die entgegengesetzte Richtung zeigen würde. Knoten x_2 wäre somit nicht mehr Ausgangsverbunden. Die Ausgangsverbundenheit ist wichtig, damit die Systemgrößen x beobachtet werden können. Repräsentiert die Kante x_3 zu y_1 einen Sensor, der das System misst, so ist dieser Systemkritisch. Fällt er aus, so ist das System nicht mehr Ausgangsverbunden. Diese Analysen können auch für die Eingangsverbundenheit gemacht werden. So ist das System zum Beispiel nicht mehr Eingangsverbunden ohne die Kante u_2 zu x_1 .

Die Überprüfung der strukturellen Ränge ergibt.

$$\text{s-Rang} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{s-Rang} \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Das System ist strukturell beobachtbar, steuerbar und erfüllt somit eine notwendige Bedingung zur vollständigen Beobachtbar- und Steuerbarkeit.

3.2.2 Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsgrenzen

Die im vorherigen Abschnitt 3.2.1 strukturelle Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit ist jedoch kein ausreichendes Kriterium. Durch ungünstig gewählte Parameter kann es sich trotzdem ergeben, dass die Kriterien zur vollständigen Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit, nicht erfüllt werden. Die Grenzen dessen lassen sich wie in Abschnitt 2.3 und 2.4 beschrieben ermitteln. Für SISO-Systeme gilt.

$$\det(Q_B) = \det \begin{pmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{m-1} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \det(Q_S) = \det \begin{pmatrix} b & Ab & A^2b & \dots & A^{m-1}b \end{pmatrix} \neq 0$$

Für die Grenzen eines Systems der Form 2.15, mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \end{pmatrix}$$

gilt

$$\det \begin{pmatrix} c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{11}a_{11} + c_{12}a_{21} & c_{11}a_{12} + c_{12}a_{22} \end{pmatrix} = c_{11}^2 a_{12} + c_{11}c_{12}(a_{22} - a_{11}) - c_{12}^2 a_{21} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} b & Ab \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} \\ b_{21} & b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} \end{pmatrix} = b_{11}^2 a_{21} + b_{11}b_{21}(a_{22} - a_{11}) - b_{21}^2 a_{12} = 0$$

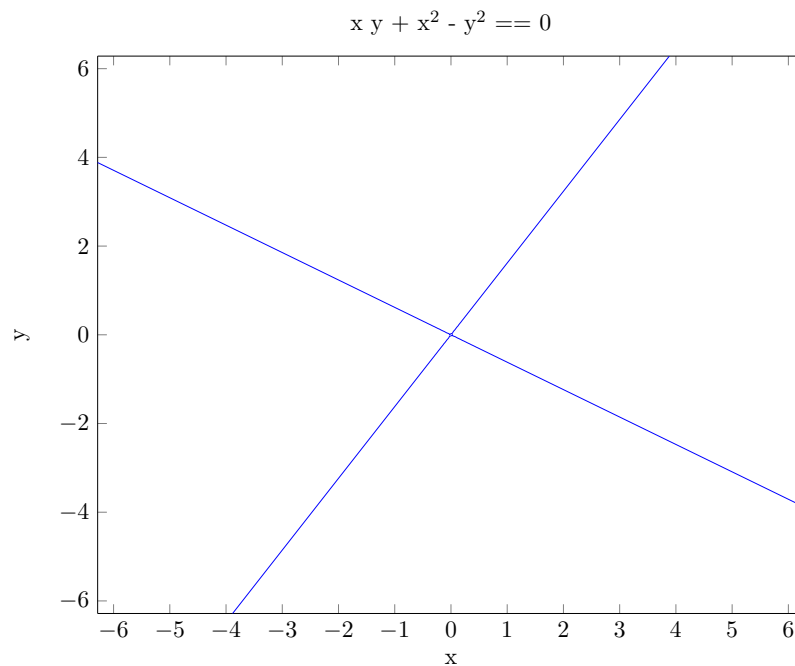


Abbildung 3.2: Grenzen der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit

Für eine Wahl von wenigen Parametern ergeben sich Polynome, dessen Nullstellen die Grenzen der Beobachtbarkeit oder Steuerbarkeit ergeben. Hierfür eignen sich Parameter aus dem c -Vektor für die Beobachtbarkeit und aus dem b -Vektor für die Steuerbarkeit. So können die beiden Eigenschaften unabhängig von einander angepasst werden. Im Generellem haben die berechneten Polynome folgende Form. Beispielsweise für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$x^2 + xy - y^2 = 0$$

In Abbildung 3.2 ist zu sehen, dass dies zwei Geraden im Raum entspricht. Falls die Wahl der Parameter, für c oder b , auf diesen Geraden liegt, ist das System nicht mehr Beobachtbar beziehungsweise Steuerbar.

Anhand der Lyapunov Stabilität kann dies ebenfalls überprüft werden[8]. Es gilt:

$$A^T X + X A + C^T C = 0 \tag{3.2}$$

$$A^T X + X A + B B^T = 0 \tag{3.3}$$

Falls X regulär ist, so ist das System Beobachtbar, nach Gleichung (3.2) oder nach (3.3) Steuerbar. Für das besprochene System werden die gleichen Grenzen, wie in Abbildung 3.2, berechnet.

3.3 Berechnung des Parameterraums mit der Lyapunov Stabilität

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, bietet das Lyapunov Stabilitätskriterium eine alternative Herangehensweise zu dem klassischen Parameterraumverfahren. Mit Hilfe dieses Kriteriums, lassen sich die Stabilitätsgrenzen berechnen, ohne die Wurzelgrenzen aus Kapitel 2.1 verwenden zu müssen. Für ein lineares zeitinvariantes System der Form 2.15 ist die Lyapunov Funktion gegeben durch $V(x) = x^T P x$, mit $\dot{V}(x) = x^T (A^T P + P A)x$. Damit das System die Stabilitätskriterien erfüllt muss P und Q positiv definit sein und $A^T P + P A = -Q$ gelten. Durch Wahl einer symmetrisch positiv definiten Matrix, zum Beispiel die Einheitsmatrix, lässt sich das Gleichungssystem für P lösen. Die Lösung ist durch die Wahl einer symmetrischen Q -Matrix ebenfalls symmetrisch, sodass eine Cholesky-Zerlegung von $P = L D L^T$ durchgeführt werden kann. Die Matrix L ist eine linke untere Dreiecksmatrix dessen Diagonalelemente gleich Eins sind und die Matrix D ist eine Diagonalmatrix. Folgende Überlegung zeigt, dass die Diagonalelemente von D größer Null sein müssen, damit die Matrix P symmetrisch positiv definit ist. Die Definition fordert, dass $x^T P x > 0 \forall x \neq 0$ ist.

$$x^T P x = x^T L D L^T x = (L^T x)^T D L^T x = y^T D y = \sum d_{ii} y_i^2 > 0 \forall y \neq 0$$

Daraus folgt, dass $d_{ii} > 0$ sein muss. Aus $y = L^T x$ folgt, dass $y \neq 0$, $x \neq 0$ entspricht, für alle L^T mit vollem Rang.

Als Beispiel dient das im Abschnitt 2.1.4 vorgestellt PT_2 -Übertragungsglied mit PID-Regelung. Die Regelungsnormalform des Systems hat folgende Form.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{KK_I}{T^2} & -\frac{1+KK_P}{T^2} & -\frac{2dT+KK_D}{T^2} \end{pmatrix}$$

Für Q wird die 3×3 -Einheitsmatrix benutzt, sodass für P gelöst werden kann. Um die Lösung zu vereinfachen, werden folgende Werte analog zum Beispiel in Abbildung 2.4 schon eingesetzt. $K = 1$, $d = -0.5$, $T = 1$ und $K_P = 1$.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= - \frac{K_D^2 K_I + K_D K_I^2 - 2K_D K_I + 4K_D + K_I^3 - K_I^2 - K_I - 4}{2K_I(K_I - 2K_D + 2)} \\
 p_{12} = p_{21} &= - \frac{2K_D^2 - 4K_D + 3K_I^2 + 2}{2K_I(K_I - 2K_D + 2)} \\
 p_{13} = p_{31} &= \frac{1}{2K_I} \\
 p_{22} &= - \frac{K_D^3 + K_D^2 K_I - 3K_D^2 + K_D K_I^2 - 2K_D K_I + 3K_D - K_I^2 + 8K_I - 1}{2K_I(K_I - 2K_D + 2)} \\
 p_{23} = p_{32} &= - \frac{K_D^2 + K_D K_I - 2K_D + K_I^2 - K_I + 1}{2K_I(K_I - 2K_D + 2)} \\
 p_{33} &= - \frac{K_D + 3K_I - 1}{2K_I(K_I - 2K_D + 2)}
 \end{aligned}$$

Hier ist bereits zu erkennen, dass die gewonnenen Ausdrücke recht lang werden. Nach der Cholesky-Zerlegung können sie in dieser Arbeit nicht mehr gezeigt werden, eine Schwäche dieses Verfahrens. Um die Stabilitätsgrenzen zu berechnen müssen die Diagonalelemente der D -Matrix gleich null gesetzt werden. Die berechneten Grenzen sind in Abbildung 3.3 zusehen. Die blaue Fläche ist der bereits bekannte stabile Bereich, welche durch die Kurven der Stabilitätsgrenzen abgegrenzt wird. Die grüne Kurve entspricht der Grenze $d_{11} = 0$, die rote Kurve $d_{22} = 0$ und die schwarze Kurve $d_{33} = 0$. Es besteht eine gute Übereinstimmung der beiden Verfahren. Zusätzlich ist zu sehen, das mit diesem Verfahren wesentlich mehr Bereiche abgegrenzt werden, diese müssen jedoch nicht alle auf ihre Stabilität geprüft werden. Der stabile Bereich wird durch $d_{11} > 0$, $d_{22} > 0$ und $d_{33} > 0$ direkt beschrieben. Dies ist praktisch für Optimierungsalgorithmen wie zum Beispiel das SQP und das Ineere-Punkt Verfahren[11], welche Randbedingungen in dieser Form benutzen.

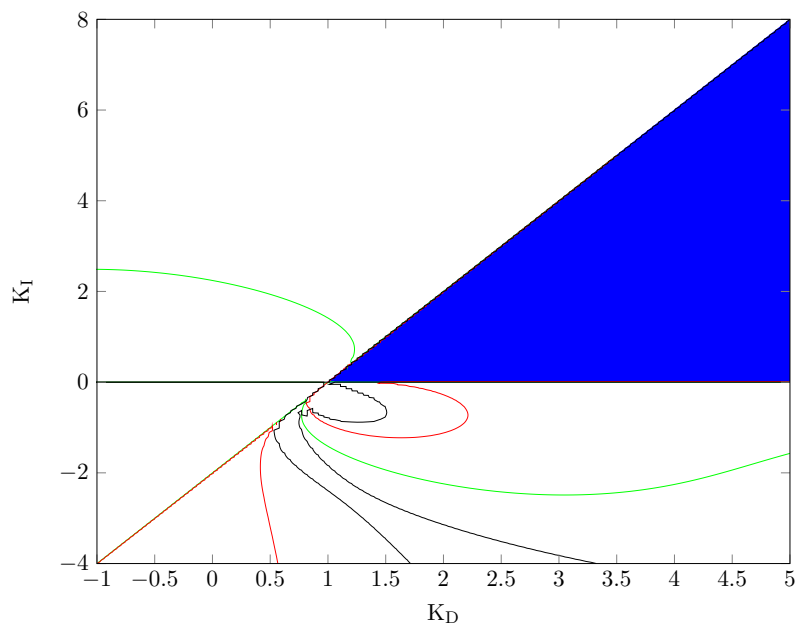


Abbildung 3.3: Stabilitätsgrenzen der Lyapunov Berechnung

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Methoden vorgestellt, die es ermöglichen die Grenzen von Systemen zu erforschen. Anhand von Beobachtbarkeits- und Steuerbarkeitsanalysen kann festgestellt werden ob ein System Regelbar ist. Die strukturelle Untersuchung des Systems kann hierbei von Vorteil sein und mögliche Schwachstellen identifizieren.

Anhand des Parameterraumverfahrens wurden die Stabilitätsgrenzen von linearen zeitinvarianten Systemen berechnet. Durch anschließende Analyse der Teilgebiete war es möglich den Raum der stabilen Parameter zu berechnen. Zusätzlich wurde gezeigt, dass dies auch bei Parameterungenauigkeiten möglich ist. Die Grenzen ließen sich genau Berechnen, jedoch bereitet die komplexe Wurzelgrenze Probleme. Die große Anzahl möglicher Geraden kann die Überprüfung der Teilgebiete umständlich und aufwendig machen, außerdem kann nicht garantiert werden, dass alle Geraden gefunden wurden.

Um die Probleme des Parameterraumverfahrens zu Umgehen wurde ein anderer Ansatz gewählt. Die Lyapunov-Stabilität eignet sich zum Test von nichtlinearen Systemen. Insbesondere wurde gezeigt, dass diese für lineare zeitinvariante Systeme immer anwendbar ist. Die entstehenden Ungleichungen beschreiben den Raum der stabilen Parameter. Allerdings ist die Berechnung aufwendig, da sie mit symbolischen Variablen hantieren muss. Ein großer Vorteil ist jedoch, dass das Gebiet in einer Form beschrieben wird, mit dem Optimierungsalgorithmen umgehen können.

Die Berechnung des stabilen Parameterraums ist möglich und liefert Ungleichungen, die den Raum direkt Beschreiben. Dabei wurden nicht nur die Grenzen des stabilen Parameter-raums berücksichtigt, sondern auch die der Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit. Das Parameterraumverfahren bietet ein robustes Verfahren bei der Suche nach stabilen Parametern. Die Berechnung der komplexen Wurzelgrenze kann dabei jedoch sehr aufwendig werden. Diese Schwäche hat die Berechnung nach der Lyapunov Stabilität nicht, mit dem zusätzlichen Vorteil, dass diese auch bei nichtlinearen Systemen anwendbar ist. Allerdings bereitet

die Umsetzung noch Schwierigkeiten, da die Berechnungen analytisch stattfinden und keine numerischen Algorithmen nutzt.

Es wurde gezeigt das die Lyapunov Stabilität eine Sinnvolle Methode zur Untersuchung des Parameterraumes ist. Im linearem Fall ist dies Bereits möglich. Zu Prüfen ist, ob sich dieses Verfahren auf andere Systeme erweitern lässt. Ziel ist den stabilen Parameterraum, auch für nichtlineare Systeme zu berechnen.

Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, J. ; BLUE, P. ; BÜNTE, T. ; GÜVENC, L. ; KAESBAUER, D. ; KORDT, M. ; MUHLER, M. ; ODENTHAL, D.: *Robust Control The Parameter Space Approach*. 2. Springer-Verlag, 2002
- [2] ACKERMANN, J. ; KAESBAUER, D.: Design of Robust PID Controllers. In: *Proceedings of European Control Conference*. Porto, 2011
- [3] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A.: *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. 2. Springer-Verlag, 2008
- [4] DESBOROUGH, L. ; MILLER, R.: Increasing Customer Value of Industrial Control Performance - Honeywell's Experience. In: *Sixth International Conference on Chemical Process Control*, 2002, S. 169–189
- [5] ENDER, D. B.: Process Control Performance: Not as Good as you Think. In: *Control Engineering* (1993), September
- [6] HOHENBICHLER, N. ; ACKERMANN, J.: Synthesis of robust PID controllers for time delay systems. In: *Proceedings of European Control Conference*. Cambridge, 2003
- [7] KHALIL, H. K.: *Nonlinear Control*. Prentice Hall, 2014
- [8] LIU, H.: *Bestimmung der Stabilitätsgrenze und Reglertuning für PIDrobust Toolbox*, RWTH Aachen, Diplomarbeit, 2015
- [9] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1 Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 10. Springer-Verlag, 2014
- [10] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2 Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. 8. Springer-Verlag, 2014
- [11] REINHARDT, R. ; HOFFMANN, A. ; GERLACH, T.: *Nichtlineare Optimierung Theorie, Numerik und Experimente*. Springer-Verlag, 2013