

**Diskontinuierliche Galerkin-Analyse für die lineare  
Elastizität**

**CES-Seminararbeit**

**Vorgelegt von:**

**Siamak Mirzagholidpour**

**Matr.Nr.: 284442**

**Betreuer:**

**M. Sc. Hamid Reza Bayat**

**November 2015**

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b> .....	3
<b>2. Basisgleichungen der linearen Elastizität</b> .....	4
<b>3. Diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren</b> .....	6
<b>4. Diskretisierung</b> .....	8
<b>5. Simulationsergebnisse und Zusammenfassung</b> .....	11
<b>6. Literatur</b> .....	13

# 1. Einführung

Diskontinuitäten können in verschiedenen Bereichen der Mechanik erscheinen. Einige Beispiele, wo die Diskontinuitäten entstehen, sind noch deutlicher, wie die Bildung von Rissen. Andere Quellen von Diskontinuitäten sind weniger sichtbar, wie die Schnittstellen zwischen verschiedenen Materialien. Darüber hinaus können kontinuierliche Felder mit Sprüngen als diskontinuierliche Felder berücksichtigt werden. Diese Arbeit zielt auf die Einbeziehung der willkürlichen Diskontinuitäten in der finite-Elemente-Methode. Die finite-Elemente-Methode ist eines der hochentwickeltesten numerischen Werkzeuge in der modernen Technik. Die Berücksichtigung der Diskontinuitäten ist aber noch eine anspruchsvolle Aufgabe. Im Rahmen der klassischen Finiten Element Methode können solche Diskontinuitäten nur durch die Position der Elementgrenzen und nicht durch die physikalische Situation bestimmt werden. Die Simulation von Risswachstum erfordert eine häufige Anpassung des Netzes, was eine schwierige und rechenintensive Aufgabe sein kann. Die numerische Umsetzung des diskontinuierlichen Modells erfolgt mit der Anwendung der diskontinuierlichen Galerkin Methode.

## 2. Basisgleichungen der linearen Elastizität

In der Elastizitätstheorie wird das Verhalten eines Körpers unter dem Einfluss von äußeren Kräften untersucht. Beschränkt man sich auf die lineare Elastizität, so erhält man für Kinematik und Kräftegleichgewicht [4]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym}(\text{grad}(\mathbf{u})) \quad 1$$

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f} = 0 \quad 2$$

wobei  $\boldsymbol{\varepsilon}$  linearen Verzerrungstensor,  $\mathbf{u}$  Verschiebungsvektor,  $\text{sym}(\text{grad}(\mathbf{u}))$  symmetrische Teil von Verschiebungsvektor,  $\boldsymbol{\sigma}$  Spannungstensor und  $\mathbf{f}$  Vektor der Volumenkräfte darstellt.

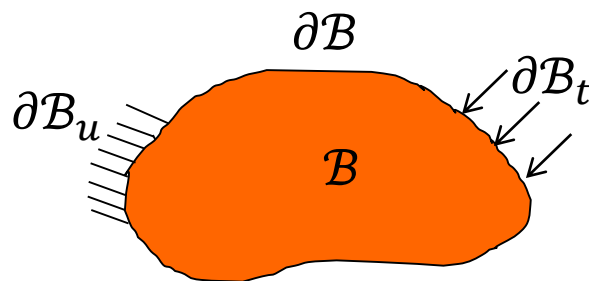


Abbildung 1: Kontinuierliches Rechengebiet

Um das Gleichungssystem zu Schließen benötigt man noch eine Gleichung, die den Zusammenhang zwischen dem Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  beschreibt [2]. In der vollständig linearen Elastizitätstheorie kommt neben der geometrisch linearen Näherung auch ein lineares Materialgesetz, das Hookesche Gesetz zum Einsatz:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 G \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{Spur}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} \quad 3$$

mit:

wobei  $E$  und  $\nu$  die Elastizitätsmodul und Querkontraktionszahl repräsentieren.

Zusammen mit den Randbedingungen

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^p & \text{auf} & \partial B_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{auf} & \partial B_t \end{cases} \quad 4$$

kommt man auf die so genannte starke Formulierung. Der komplette Rand von  $B$

$$\partial B = \partial B_u \cup \partial B_t \quad 5$$

Wird in zwei Teile  $\partial B_u$ , wo nur Verschiebung  $\mathbf{u}^p$  und  $\partial B_t$ , wo nur Ziehkraft definiert wird, geteilt. Darüber hinaus gilt:

$$\partial\mathcal{B}_u \cap \partial\mathcal{B}_t = \emptyset \quad 6$$

Setzt man die Gleichungen (1) und (3) in (2) und Multipliziert man die daraus ergebene Gleichung mit der Testfunktion  $\delta\mathbf{u}$  und nach einigen Umformungen ergibt sich die sogenannte schwache Formulierung:

$$\int_B \delta\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dV - \int_B \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, dV - \int_{\partial B} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA = 0 \quad 7$$

$\delta\boldsymbol{\varepsilon}$  kann man auch als  $\text{sym}(\text{grad}(\delta\mathbf{u}))$  umschreiben. Spannungstensor ist auch durch Elastizitätsgesetz gegeben. So gibt es in die Gleichung (5) nur ein Unbekanntes Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

### 3. Diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren

Im Rahmen dieser Seminararbeit wird angenommen dass die potenzielle Unstetigkeitszone bekannt ist. Wir führen eine interne Oberfläche  $\Gamma$  entlang dieser Zone. Damit werden zwei Teilgebiete  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  in der unmittelbaren Nähe der Diskontinuität gebildet.

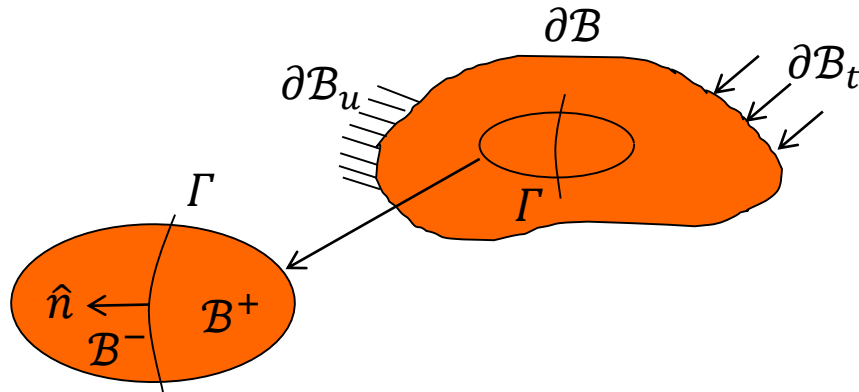


Abbildung 2: Diskontinuierliches Rechengebiet

Der Einheitsnormalenvektor zu  $\Gamma$  bezeichnen wir mit  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}}^+ = \bar{\mathbf{n}}^-$ . So unterteilt sich unsere Lösungsgebiet in [1]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}^+(\mathbf{x}) & \text{in } \mathcal{B}^+ \\ \mathbf{u}^-(\mathbf{x}) & \text{in } \mathcal{B}^- \end{cases} \quad 8$$

Entsprechend wird die symmetrische Spannungstensor auch separat für  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  als symmetrischer Teil der Gradient des Verschiebungsfeldes ausgedrückt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}^+ = \text{sym}(\text{grad}(\mathbf{u}^+)) & \text{in } \mathcal{B}^+ \\ \boldsymbol{\varepsilon}^- = \text{sym}(\text{grad}(\mathbf{u}^-)) & \text{in } \mathcal{B}^- \end{cases} \quad 9$$

Zur Behandlung der Diskontinuitäten führen wir einen Sprung- und Mittelwertterm:

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{u}^+|_{\Gamma} - \mathbf{u}^-|_{\Gamma} \quad 10$$

$$\{\mathbf{u}\} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^+|_{\Gamma} + \mathbf{u}^-|_{\Gamma}) \quad 11$$

Sie wurden anhand der Feldvariabel  $\mathbf{u}$  ausgewertet an beide Seiten von Diskontinuität  $\Gamma$  berechnet.

Wir müssen zusätzliche Randbedingungen für die Diskontinuität definieren. Diese sind die Kontinuität der Verschiebung und die Zugkraft:

$$[[\mathbf{u}]] = 0 \quad 12$$

$$[[\boldsymbol{\sigma}]] \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad 13$$

Um das Diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren zu definieren, führen wir den Begriff gemittelter Zugkraft:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma^+} + \boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma^-}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad 14$$

Um die schwache Formulierung des Randwertproblems zu erhalten, multiplizieren wir wie beim kontinuierlichen Fall die starke Form des Randwertproblems mit der Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$ . Nach der partiellen Integration über  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, dV - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^+) \cdot \bar{\mathbf{n}}^+ \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^- \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^-) \cdot \bar{\mathbf{n}}^- \, d\Gamma = \\ \int_{\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA \end{aligned} \quad 15$$

Mit der Definition von dem Normalenvektor:

$$- \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^+) \cdot \bar{\mathbf{n}}^+ \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^- \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^-) \cdot \bar{\mathbf{n}}^- \, d\Gamma = \int_{\Gamma} [ [\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})] \cdot \bar{\mathbf{n}} ] \, d\Gamma \quad 16$$

, der Identität  $[[\delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})]] = [[\delta \mathbf{u}]] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} + [[\mathbf{u}]] \cdot \{\delta \boldsymbol{\sigma}\}$  und der Stätigkeit der Verschiebung  $[[\mathbf{u}]] = 0$  erhalten wir:

$$\int_{\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, dV + \int_{\Gamma} [[\delta \mathbf{u}]] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \int_{\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA \quad 17$$

Solange die resultierende Gleichung weder symmetrisch noch stabil ist, der Term  $\int_{\Gamma} [[\mathbf{u}]] \cdot \{\delta \boldsymbol{\sigma}\} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma$  kann dazu addiert werden um die Gleichung zu symmetrisieren. Ein zusätzlicher Term nach Nitsche Methode  $\int_{\Gamma} \theta [[\delta \mathbf{u}]] \cdot [[\mathbf{u}]] \, d\Gamma$  wird dazu addiert um die Methode zu stabilisieren.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, dV + \int_{\Gamma} [ [[\delta \mathbf{u}]] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \bar{\mathbf{n}} + [[\mathbf{u}]] \cdot \{\delta \boldsymbol{\sigma}\} \cdot \bar{\mathbf{n}} ] \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \theta [[\delta \mathbf{u}]] \cdot [[\mathbf{u}]] \, d\Gamma = \\ \int_{\mathcal{B}^+ \cup \mathcal{B}^-} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, dA \end{aligned} \quad 18$$

Mit dem Koeffizient  $\theta$  kann man der Einfluss des Stabilisators verstellen.

## 4. Diskretisierung

Die schwache Formulierung wird mittels der finite-Elemente-Methode gelöst. Die räumliche Diskretisierung des betrachteten Problems charakterisiert sich durch Berücksichtigung der internen Schnittstellen.

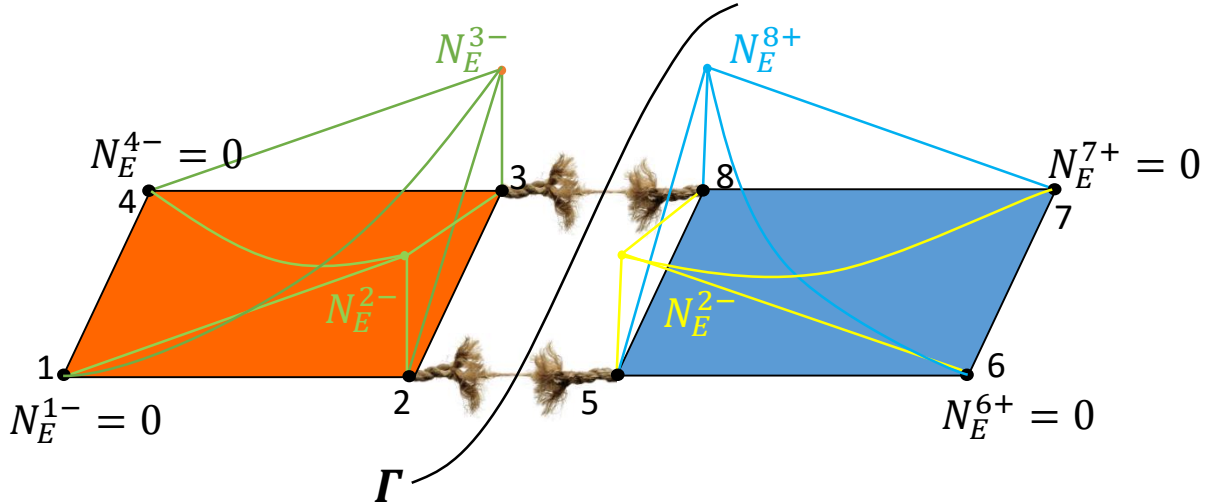


Abbildung 3: Darstellung der dG-Formfunktionen

Die schwache Form verbunden mit den Domains  $\mathcal{B}^+$  und  $\mathcal{B}^-$  ist mit dem isoparametrischen Standard-Element diskretisiert. Die Geometrie  $\mathbf{x}$  ist Elementweise mit den Formfunktionen  $N^k$  und  $n_{en}$  der Anzahl der Elementknoten entwickelt [3]:

$$\mathcal{B} = \bigcup_e^{n_{el}} \mathcal{B}_e \quad \mathbf{x}|_{\mathcal{B}_e} = \sum_{i=1}^{n_{en}} N^i \mathbf{x}_i \quad 19$$

und nach isoparametrischem Konzept, die Verschiebung  $\mathbf{u}$  und ihre Variation  $\delta\mathbf{u}$  sind mit derselben Formfunktion entwickelt:

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{B}_e} = \sum_{i=1}^{n_{en}} N^i \mathbf{u}_i \quad \delta\mathbf{u}|_{\mathcal{B}_e} = \sum_{i=1}^{n_{en}} N^i \delta\mathbf{u}_i \quad 20$$

Basierend auf den obigen Diskretisierungen bekommen die entsprechenden Gradientenfelder  $\epsilon$  und  $\delta\epsilon$  folgende Form:

$$\epsilon|_{\mathcal{B}_e} = \sum_{i=1}^{n_{en}} \mathbf{u}_i \nabla N^i \quad \delta\epsilon|_{\mathcal{B}_e} = \sum_{i=1}^{n_{en}} \delta\mathbf{u}_i \nabla N^i \quad 21$$

und Die Diskretisierung der Sprung- und Mitteltermen

$$[[\mathbf{u}]]|_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{n_{en}^+} N^{i+}|_{\Gamma} \mathbf{u}_i^+ - \sum_{i=1}^{n_{en}^-} N^{i-}|_{\Gamma} \mathbf{u}_i^- \quad 22$$

$$\{\mathbf{u}\}|_{\Gamma} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{n_{en}^+} N^{i+}|_{\Gamma} \mathbf{u}_i^+ + \sum_{i=1}^{n_{en}^-} N^{i-}|_{\Gamma} \mathbf{u}_i^- \right] \quad 23$$

Dies bedeutet, dass die Methode Doppelknoten entlang der Schnittstellen verlangt. Deswegen gehören die Werte  $\mathbf{u}^+$  und  $\mathbf{u}^-$  verschiedenen unabhängigen Knoten, die



auf demselben Ort platziert sind. Die zusätzlichen Integralterme kann man in der neuen dG-Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  zusammenfassen:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 \quad 24$$

$$\int_{\Gamma} [[\delta \mathbf{u}]] \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = [\delta \mathbf{u}^T]_{1 \times 16} \cdot \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T_{16 \times 2} \cdot \hat{\mathbf{n}}_{2 \times 3} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{3 \times 3} \cdot \mathbf{B}_{3 \times 16} \, dA \right]}_{\mathbf{K}_1}_{16 \times 16} \cdot [\mathbf{u}]_{16 \times 1} \quad 25$$

$$\int_{\Gamma} [[\mathbf{u}]] \cdot \{\delta \boldsymbol{\sigma}\} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dA = [\delta \mathbf{u}^T]_{1 \times 16} \cdot \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{B}^T_{16 \times 3} \cdot \hat{\mathbf{E}}^T_{3 \times 3} \cdot \hat{\mathbf{n}}^T_{3 \times 2} \cdot \mathbf{N}_{2 \times 16} \, dA \right]}_{\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_1^T}_{16 \times 16} \cdot [\mathbf{u}]_{16 \times 1} \quad 26$$

$$\int_{\Gamma} \theta [[\delta \mathbf{u}]] \cdot [[\mathbf{u}]] \, dA = [\delta \mathbf{u}^T]_{1 \times 16} \cdot \underbrace{\left[ \int_{\Gamma} \theta_{1 \times 1} \cdot \mathbf{N}^T_{16 \times 2} \cdot \mathbf{N}_{2 \times 16} \, dA \right]}_{\mathbf{K}_3}_{16 \times 16} \cdot [\mathbf{u}]_{16 \times 1} \quad 27$$

Mit:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} (u_1^+)_x \\ (u_1^+)_y \\ \vdots \\ (u_4^+)_x \\ (u_4^+)_y \\ (u_1^-)_x \\ (u_1^-)_y \\ \vdots \\ (u_4^-)_x \\ (u_4^-)_y \end{bmatrix}_{1 \times 16}, \quad \delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} (\delta u_1^+)_x \\ (\delta u_1^+)_y \\ \vdots \\ (\delta u_4^+)_x \\ (\delta u_4^+)_y \\ (\delta u_1^-)_x \\ (\delta u_1^-)_y \\ \vdots \\ (\delta u_4^-)_x \\ (\delta u_4^-)_y \end{bmatrix}_{1 \times 16}, \quad \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_1 & n_2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^+ & 0 & \dots & N_1^+ & 0 & -N_1^- & 0 & \dots & -N_4^- & 0 \\ 0 & N_1^+ & \dots & 0 & N_1^+ & 0 & -N_1^- & \dots & 0 & -N_4^- \end{bmatrix}_{2 \times 16}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^+}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4^+}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1^-}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4^-}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^+}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^+}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_1^-}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4^-}{\partial y} \\ 2 \frac{\partial N_1^+}{\partial y} & 2 \frac{\partial N_1^+}{\partial x} & \dots & \dots & \dots & 2 \frac{\partial N_1^-}{\partial y} & 2 \frac{\partial N_1^-}{\partial x} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}_{3 \times 16}$$

Die numerische Lösung des 2-dimensionalen Problems erfolgt durch die Auswertung der Integralterme auf vier Gaußpunkten die auf den Schnittstellen und das Lösen des Gleichungssystems. Als das globale Residuum erhält man:

$$\mathbf{R} = \sum_E^{n_E} [\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3] \mathbf{u} \quad 28$$

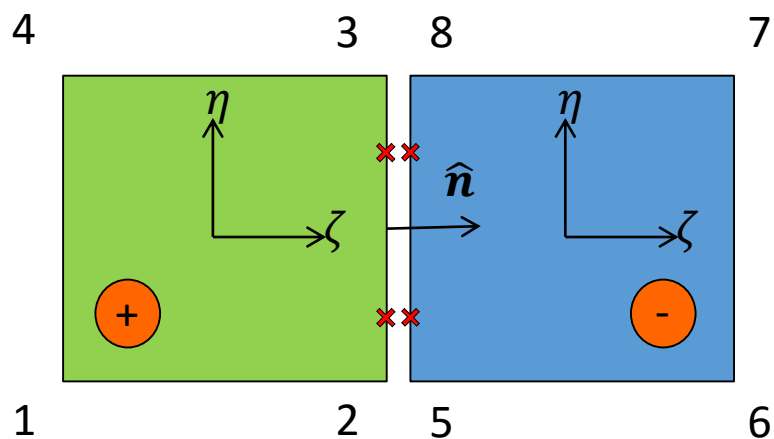


Abbildung 4: Darstellung des 2D dG-Elementes mit den Gaußpunkten

## 5. Simulationsergebnisse und Zusammenfassung

Hier sind die Ergebnisse eines Modellbeispiels dargestellt, das aus zwei verschiedenen Materialien zusammengesetzt ist.

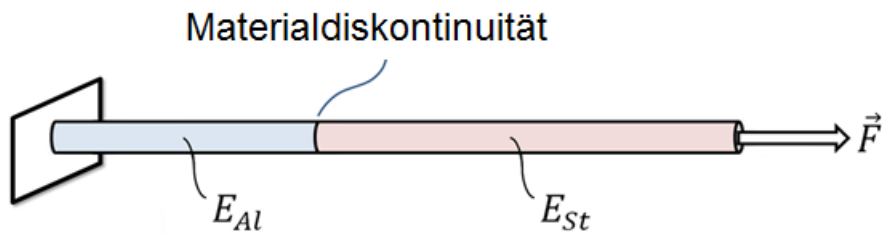


Abbildung 5: 1D Stab

Wie schon vorher erwähnt wurde, beim dG-Solver sind zusätzliche Knoten bei der Diskontinuität benötigt.

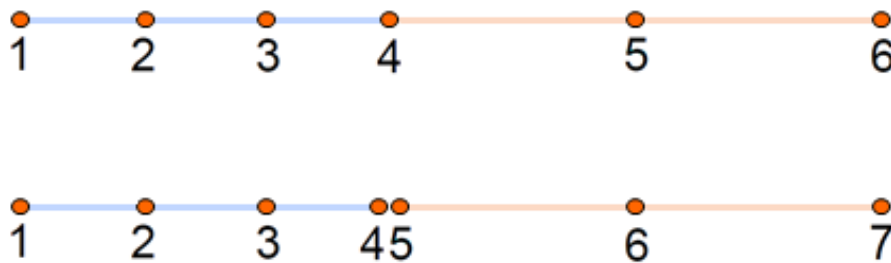
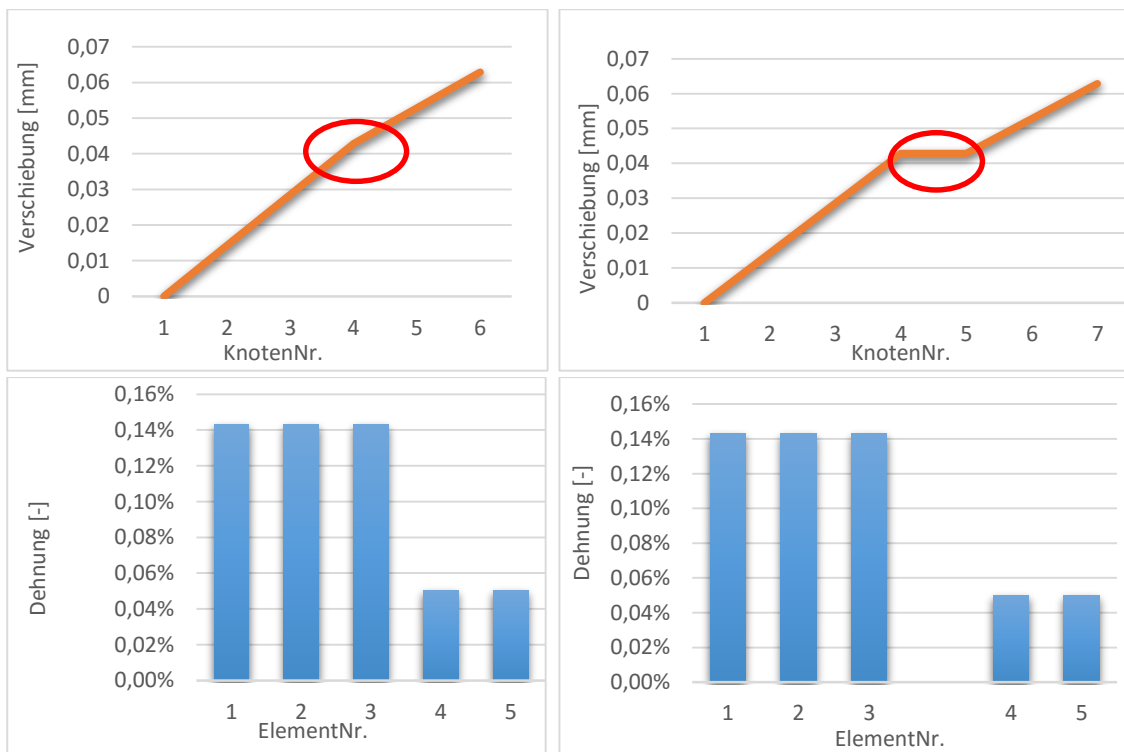


Abbildung 6: Darstellung des cG- und dG-Elementes



Standard-cG-Element

dG-Element

Abbildung 7: Simulationsergebnisse

Die eindimensionale Simulation des dG-Problems zeigen identische Ergebnisse mit der Standard-Galerkin-Methode. Diese Identität lässt sich durch lineare Elastizität erklären. Aufgrund der Gleichheit der exakten und approximierten Lösung in linearen Elastizität sind keine Unterschiede in der Ergebnisse zu erkennen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Prinzip eines linear elastischen dG-Solver verstanden und zum Vergleich mit dem vorhandenen Solver ein Programm in Matlab zum Berechnen der dG-Steifigkeitsmatrix geschrieben. Basierend auf einem kartesischen Netz wird zunächst ein zweites Gitter mit der gleichen Elementanzahl und Geometrie erzeugt. Der Unterschied hierbei ist, dass bei dem neuen Gitter besitzen alle Elemente an der Schnittstellen die zusätzliche Knoten die für die Berechnung des dG-Steifigkeitsmatrixes notwendig sind. Im nächsten Schritt berechnet das Programm durch die Auswertung der Integralterme auf der Gaußpunkte das dG-Steifigkeitsmatrix.

## 6. Literatur

1. *A hybrid discontinuous Galerkin/ interface method for the computational modelling of failure*, J. Mergheim, E. Kuhl and P. Steinmann, 2003
2. *A posteriori Fehlerschätzer für gemischte Finite Elemente in der linearen Elastizität*, Dissertation, Marco Lonsing, 2002
3. *Computational Modeling of Strong and Weak Discontinuities*, Dissertation, Julia Mergheim, 2006
4. *Finite Element Technology, Lecture Notes*, Stefanie Reese, 2015