

Diese Arbeit wurde vorgelegt am
Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES)

**Diskontinuierliche Galerkin Verfahren für interne
Strömungen**
Discontinuous Galerkin methods for internal flows

Seminararbeit
Computational Engineering Science

Januar 2017

Vorgelegt von
Presented by
Betreut durch
Supervisor

Eugen Salzmann, 309067
Eugen.Salzmann@rwth-aachen.de
M.Sc. Alexander Jaust
Lehrstuhl für Mathematik (MathCCES)
RWTH Aachen University

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Seminararbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen meiner Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht. Dasselbe gilt sinngemäß für Tabellen und Abbildungen. Diese Arbeit hat in dieser oder einer ähnlichen Form noch nicht im Rahmen einer anderen Prüfung vorgelegen.

Aachen, im Januar 2016

Eugen Salzmann

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole	IV
Abbildungsverzeichnis	VI
1. Einleitung	1
2. Kavitation	1
3. Numerik	5
3.1. Diskontinuierliche Galerkin (DG) Verfahren	5
3.2. Hybride Gemischte Finite Elemente (GFE) Verfahren	6
3.3. Hybride Diskontinuierliche Galerkin (HDG) Verfahren	8
4. Zusammenfassung und Ausblick	11
A. Anhang	13
A.1. Die physikalischen Flüsse und Ableitungen	13
A.2. Normieren des Kavitationsmodells	15
Literatur	17

Abkürzungen und Symbole

Abürzungen

- FEM** Finite Elemente Methode
FVV Finite Volumen Verfahren
DG Diskontinuierliche Galerkin
HDG Hybride Diskontinuierliche Galerkin
NSG Navier-Stokes Gleichungen
CES Computational Engineering Science
KDP Konvektions-Diffusions-Problem
KDG Konvektions-Diffusions-Gleichung
GFE Gemischte Finite Elemente

Lateinische Symbole

Symbol	Beschreibung	Einheit
t	Zeit	sec
v	Geschwindigkeit (Vektor (u,v))	$[\frac{m}{s}]$
p	Druck	$[Pa]$
\mathbb{I}	Einheitsmatrix	-
E	Energie	$[J]$
H	Entalpie	$[J]$
k	Wärmeleitfähigkeit	$[\frac{W}{m \cdot K}]$
T	Temperatur	$[K]$
V	Volumen	$[m^3]$
B	Modellkonstante	$[Pa]$
N	Modellkonstante	-
L	Latente Wärme	$[J]$
HOT	Terme höherer Ordnung	-
C	Modellkonstante	$[Pa \frac{kg}{m^3}]$
c_p	Wärmekapazität	$[\frac{J}{K}]$

Symbol	Beschreibung	Einheit
c_{eq}	Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$
s	Entropie	$\left[\frac{J}{K}\right]$

Griechische Symbole

Symbol	Beschreibung	Einheit
ρ	Dichte	$\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
τ	Spannungstensor	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$
μ	Viskosität	$\left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$
α	Volumetrischer Dampfanteil	-

Indizes

Index	Beschreibung
sat	Sättigungszustand
vap	Dampf (vapor)
liq	Flüssigkeit (liquid)
L	Flüssigkeit Abb. 1
v	Dampf Abb. 1
$spec$	spezifisch
∞	Anströmung
$\hat{\cdot}$	normiert (dimensionslos)

Abbildungsverzeichnis

1.	Verlauf der Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit im Nassdampfgebiet bei $T = 293,15\text{K}$ [11]	3
2.	Graphische Darstellung von v^\pm	7
3.	Graphische Darstellung der Reduktion der Freiheitsgrade	10
4.	Geometrie und Rechengitter des Testfalls	12
5.	Kavitationsaufnahmen am "micro channel" [7]	12
6.	Verlauf und Ableitung der barotropischen Druckfunktion des Modells am Phasenübergang	14

1. Einleitung

Diese Seminararbeit ist im Rahmen des Masterseminars im Computational Engineering Science (CES) Studiengang entstanden und folgt einem Paper von J. Schütz und G. May [10]. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Aufbereitung des in diesem Paper vorgestellten Verfahrens. Außerdem wird ein Anwendungsbeispiel in Form von Kavitation präsentiert. Zur Realisierung der Anwendung wird eine Möglichkeit zur Erweiterung eines existierenden Finite Elemente Methode (FEM) Löser um ein Kavitationsmodell vorgestellt.

Der Aufbau des Berichts ist wie folgt. Zu Anfang wird das in internen Strömungen auftretende physikalische Phänomen der Kavitation, sowie die Modellierung dieses, erörtert. Dafür wird ein algebraisches Kavitationsmodell, nach einem Paper von S. Hickel, M. Mihatsch und S. J. Schmidt [6] vorgestellt. Der darauf folgende Abschnitt befasst sich mit der Diskretisierung von Konvektions-Diffusions-Problem (KDP) durch das in [10] vorgestellte Hybride Diskontinuierliche Galerkin (HDG) Verfahren. Schließlich wird eine kurze Zusammenfassung und ein Ausblick, mit einem möglichen Testfall für den auf dem Verfahren basierten Löser und das Modell, gegeben. Im Anhang sind kurz einige Anmerkungen zur Implementierung des Löser und die Integration des Kavitationsmodells festgehalten.

2. Kavitation

In diesem Kapitel wird die in der Einleitung erwähnte Anwendung vorgestellt. Dabei wird vor allem auf die Kavitation in internen Strömungen, also Strömungen in Rohren und Kanälen, eingegangen. Ein besonderes Interesse fällt außerdem auf niedrig dimensionierte Kanäle, sogenannten „micro channels“, wie sie beispielsweise im Verbrennungsmotor, in Form eines Injektors, vorkommen.

Bei Strömungen in „micro channels“ kommt es zu hohen lokalen Druck- und Temperaturgradienten. Dadurch können sich in der strömenden Flüssigkeit Regionen ausbilden, in denen der statische Druck unter den Sättigungsdampfdruck des Fluides abfällt. Ist das der Fall verdampft die Flüssigkeit in diesen Gebieten. Die sich so ergebenden, mit Dampf gefüllte Blasen, werden durch die Strömung in Bereiche höheren Druckes getragen, wo sie wieder in sich zusammenfallen.

Der Einfluss dieser Dampfbläschen auf die Strömung kann in unterschiedlicher Weise modelliert werden. Eine der simpelsten ist ein algebraisches Modell, welches unter anderem in [6] genutzt wird. Bei diesem Ansatz werden, im Gegensatz zu anderen Verfahren, keine zusätzlichen Differentialgleichungen eingeführt, sondern nur die kompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (NSG) gelöst. Diese sind hier (1) ohne äußere Kräfte gegeben.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) &= 0 \\
\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes \rho v + p \mathbb{I}) &= \nabla \cdot \tau \\
\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (H \rho v) &= \nabla \cdot (\tau v - k \nabla T)
\end{aligned} \tag{1}$$

Für den Spannungstensor τ gilt hierbei

$$\tau = \mu \left[(\nabla \otimes v)^T + \nabla \otimes v - \frac{2}{3} \mathbb{I} \nabla \cdot v \right]. \tag{2}$$

Bei diesem Ansatz wird nach Volumen gemittelten Größen gelöst und vorerst nicht zwischen den Phasen unterschieden. Das Kavitationsmodell greift erst bei den Schließbedingungen der Gleichungen an. Dazu wird in Abhängigkeit der gemittelten Dichte $\bar{\rho}$ ein volumetrischer Dampfanteil α bestimmt. Dieses α mit

$$\alpha = \frac{V_{vap}}{V} = \begin{cases} 0, & \bar{\rho} \geq \rho_{sat,liq} \\ \frac{\rho_{sat,liq} - \bar{\rho}}{\rho_{sat,liq} - \rho_{sat,vap}}, & \bar{\rho} < \rho_{sat,liq} \end{cases} \tag{3}$$

wird genutzt um zwischen Gebieten in denen Kavitation auftritt und welchen in denen das Fluid nur in flüssiger Phase vorliegt zu unterscheiden. Liegt ein Dampfanteil vor, so wird eine andere Druckgleichung zum Schließen des Systems eingesetzt als für die reine Flüssigkeit. Für $\alpha = 0$ (reine Flüssigkeit) wird eine abgewandelte Form der taitischen Zustandsgleichung, welche die klassische Zustandsgleichung für Wasser darstellt, verwendet. Für den Druck gilt somit

$$\bar{p} = (p_{sat} + B) \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_{sat,liq}} \right)^N - B, \quad \alpha = 0. \tag{4}$$

Dabei sind $N = 7,1$ und $B = 3,06 \cdot 10^8 \text{Pa}$ angepasste Konstanten [6]. Ist $0 < \alpha < 1$ so liegt in dem Bereich Kavitation und somit ein Zweiphasengebiet vor. Es wird die Annahme getroffen, dass sich dieses in einem thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Für die Herleitung einer Druckgleichung im Nassdampfgebiet wird außerdem der Phasenübergang als instantan, isentrop und im mechanischen Gleichgewicht angenommen. Mit diesen Annahmen lässt sich eine Gleichung für die im Zweiphasengebiet geltende Schallgeschwindigkeit

$$c_{eq} = \frac{L \rho_{vap}}{\sqrt{c_{p,liq} T}} \frac{1}{\bar{\rho}} + HOT \tag{5}$$

formulieren. Die Terme höhere Ordnung (HOT) werden an dieser Stelle vernachlässigt. Der Verlauf der Schallgeschwindigkeit ist für eine Referenztemperatur von 293,15K in Abbildung 1 dargestellt.

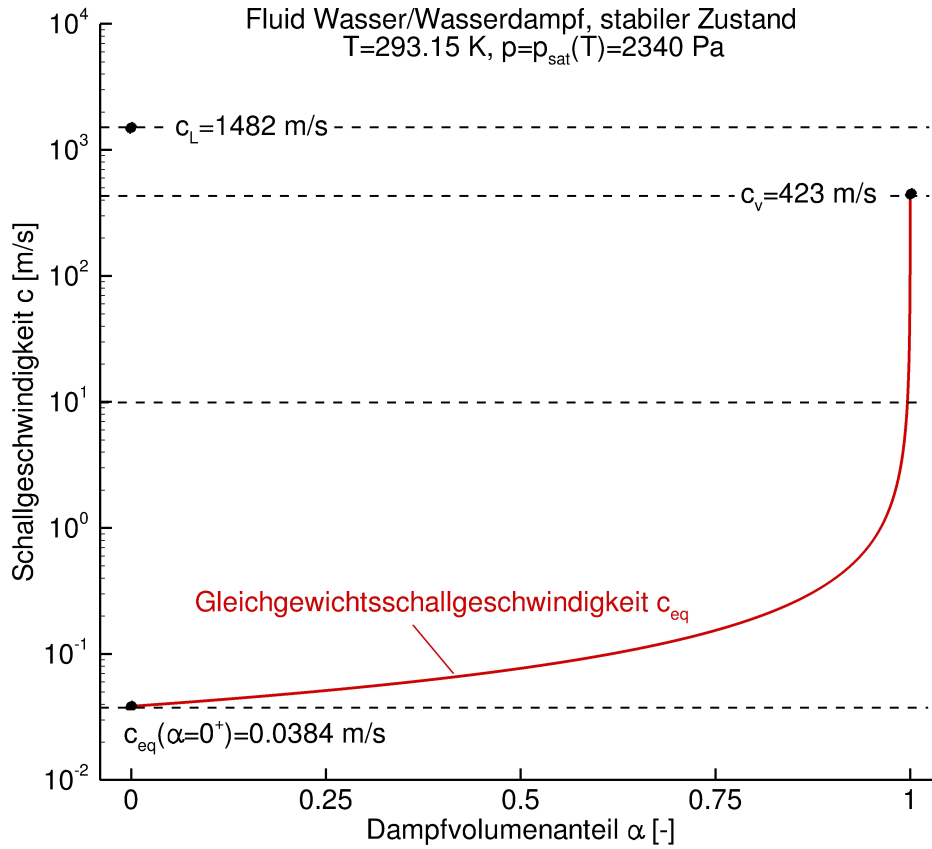


Abbildung 1: Verlauf der Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit im Nassdampfgebiet bei $T = 293,15\text{K}$ [11]

Das Auffälligste bei diesem Verlauf ist die Unstetigkeit links bei $\alpha = 0^+$, wo der Übergang zur Flüssigkeit stattfindet. Mit $0^+ := \lim_{\tau \rightarrow 0} 0 + \tau$. Die Schallgeschwindigkeit in Wasser entspricht $c_L = 1482\text{m/s}$, bei der Bildung von Dampf wird aber die Gleichgewichtsschallgeschwindigkeit c_{eq} genutzt. Diese ist Nahe $\alpha = 0$ um mehrere Größenordnungen kleiner. Diese Unstetigkeit wird im Anhang A.1 weiter untersucht.

$$c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{s=\text{konst}}} \quad (6)$$

In (6) ist ein Zusammenhang zwischen dem Druck und der isentropen Schallgeschwindigkeit, welcher für beide Phasen gilt, gegeben. Aus diesem und (5) lässt sich somit durch Integration eine Druckgleichung für das Nassdampfgebiet

$$\bar{p} = p_{\text{sat}} + C \left(\frac{1}{\rho_{\text{sat},\text{liq}}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (7)$$

herleiten. Die Viskosität einer Flüssigkeit und die eines Gases unterscheiden sich für gewöhnlich um mehrere Größenordnungen, weswegen diese im Model mit dem Dampfanteil α

$$\bar{\mu} = (1 - \alpha) \left(1 + \frac{5}{2} \alpha \right) \mu_{liq} + \alpha \mu_{vap} \quad (8)$$

skaliert wird. Die kompressiblen NSG aus (1) lassen sich auch als eine **Konvektions-Diffusions-Gleichung** (KDG) formulieren. Dazu werden in zwei Raumdimensionen die Dichte ρ , die Impulsdichte in x- und y-Richtung ρu , ρv und die Energiedichte E in einem Lösungsvektor $w = (\rho, \rho u, \rho v, E)^T$ zusammengefasst. w muss somit

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot (f(w) - f_v(w, \nabla w)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (9)$$

erfüllen. Für den konvektivem Fluss gilt $f(w) = (f_1, f_2)$

$$\begin{aligned} f_1 &= (\rho u, p + \rho u^2, \rho u v, u \rho H)^T, \\ f_2 &= (\rho v, \rho u v, p + \rho v^2, v \rho H)^T, \\ H &= E_{spec} + \frac{p}{\rho}, \quad E_{spec} = \frac{E}{\rho}. \end{aligned} \quad (10)$$

Für den viskosen Fluss gilt $f_v(w, \nabla w) = (f_{v,1}, f_{v,2})$

$$\begin{aligned} f_{v,1} &= (0, \tau_{11}, \tau_{21}, u\tau_{11} + v\tau_{12} + k\partial_{x_1} T)^T, \\ f_{v,2} &= (0, \tau_{12}, \tau_{22}, u\tau_{21} + v\tau_{22} + k\partial_{x_2} T)^T. \end{aligned} \quad (11)$$

τ ist wieder der Spannungstensor und kann in Komponentenschreibweise wie folgt formuliert werden

$$\tau_{ij} = \mu \left[(\partial_{x_j} v_i + \partial_{x_i} v_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^2 \partial_{x_k} v_k \right] \quad (i, j = 1, 2). \quad (12)$$

Gleichung (12) lässt sich in 2-D weiter vereinfachen

$$\tau = \mu \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \partial_{x_1} u - \frac{2}{3} \partial_{x_2} v & \partial_{x_2} u + \partial_{x_1} v \\ \partial_{x_1} v + \partial_{x_2} u & \frac{4}{3} \partial_{x_2} v - \frac{2}{3} \partial_{x_1} u \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Das System aus (9) besitzt mehr Unbekannte als Gleichungen und ist deshalb nicht lösbar. Erst mit der Betrachtung zusätzlicher Gleichungen für den Druck und die Temperatur, in diesem Fall durch das Kavitationsmodell und die kalorische Zustandsgleichung, wird das System geschlossen und somit lösbar. Die numerische Lösung von Problemen dieser Art wird im nächsten Abschnitt behandelt.

3. Numerik

In diesem Kapitel wird das **Hybride Diskontinuierliche Galerkin** (HDG) Verfahren anhand einer stationären **Konvektions-Diffusions-Gleichung** (KDG) für eine Skalare Größe w diskutiert. Dazu wird zunächst in Kapitel 3.1 ein klassisches DG Verfahren für ein Konvektionsproblem vorgestellt. Anschließend wird die Diskretisierung einer Diffusionsgleichung mit Hilfe des sogenannten **Gemischte Finite Elemente** (GFE) Verfahrens veranschaulicht. Im letzten Abschnitt wird eine Kombination beider Methoden mittels Hybridisierung für das KDP

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(w) - \varepsilon \Delta w &= h & \forall x \in \Omega \\ w &= g & \forall x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

thematisiert. Dabei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, d die Raumdimension, h ein beliebiger, in L^2 beschränkter Quellterm, g eine Dirichlet-Randbedingung und f eine glatte, möglicherweise nichtlineare, Funktion in w .

3.1. Diskontinuierliche Galerkin (DG) Verfahren

Wird nur der Konvektionsterm aus (14) betrachtet, mit $\varepsilon = 0$ und $h = 0$, so kann das sich ergebende Problem mit einem Standard DG Verfahren, nach Reed und Hill diskretisiert werden [9]. Diese Methode wurde ursprünglich zur Lösung von hyperbolischen Problemen hergeleitet [1]. Nicht lineare hyperbolische Probleme lassen Lösungen mit Unstetigkeiten, wie beispielsweise Verdichtungsstöße, zu. Beim DG Verfahren darf die Lösungen über die Elementgrenzen unstetig sein, während sie auf den Elementen mit Polynomen bis zum Grad n_p approximiert wird und so dort sehr glatt ist. Der Informationsaustausch über die Elementgrenzen geschieht über numerische Approximation der physikalischen Flüsse, ähnlich wie bei einem **Finite Volumen Verfahren** (FVV) [5]. Ist der Polynomgrad $n_p = 0$ so ist das DG Verfahren ein FVV [8]. In starker Form lautet das Problem

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(w) &= 0 & \forall x \in \Omega \\ w &= g & \forall x \in \partial\Omega^- \\ \partial\Omega^- &:= \{x \in \partial\Omega \mid f'(w) \cdot n < 0\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Bei den Randbedingungen ist zu beachten, dass der Informationsfluss gerichtet ist und deshalb zwischen einem Zuflussrand $\partial\Omega^-$ und einem Ausflussrand $\partial\Omega \setminus \partial\Omega^-$ unterschieden werden muss. Für w auf dem Rand gilt

$$w_{\partial\Omega}(w) = \begin{cases} g, & x \in \partial\Omega^- \\ w, & x \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega^-. \end{cases} \quad (16)$$

In schwacher Form ergibt sich das Problem dann zu. Finde $w \in V$, sodass

$$- \int_{\Omega} f(w) \cdot \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Omega} f(w_{\partial\Omega}(w)) \cdot n \varphi d\sigma = 0 \quad (17)$$

für alle $\varphi \in V$ erfüllt ist. Nach Einführung einer Triangulierung aus N_e nicht überlappenden Elementen, welche vereint wieder Ω ergeben (formal: $\Omega = \bigcup_{k=1}^{N_e} \Omega_k$), lässt sich der diskrete Raum $V_h \subset V$ als Raum von L^2 -Funktionen, die auf den Elementen Polynome bis zum Grad n_p darstellen, mit

$$V_h := \{f \in L^2(\Omega) \mid f|_{\Omega_k} \in \Pi^{n_p}(\Omega_k) \quad \forall k = 1, \dots, N_e\} \quad (18)$$

definieren. Mit Hilfe dieses Raumes wird das Standard DG Verfahren wie folgt formuliert. Finde ein $w_h \in V_h$, sodass

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_e} \left(- \int_{\Omega_k} f(w_h) \cdot \nabla \varphi_h^- dx + \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} f^{num}(w_h^+, w_h^-, n) \varphi_h^- d\sigma \right. \\ \left. + \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} f(w_{\partial\Omega}(w_h)) \cdot n \varphi_h^- d\sigma \right) = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

für alle $\varphi_h \in V_h$ erfüllt ist. Dabei wird im Unterschied zu klassischen Finite Elemente Verfahren über jedes einzelne Element integriert und dann bis N_e aufsummiert, sodass sich eine Unterscheidung für die Randintegrale ergibt. Teilt sich ein Element seinen Rand mit dem Rand des Gebiets Ω , wird dort die Randbedingung aufgeprägt, ist dies nicht der Fall, so wird der Informationsfluss zwischen den Elementen durch eine numerische Flussfunktion $f^{num}(\cdot, \cdot, \cdot)$ approximiert. Für DG Verfahren kann beispielsweise der Fluss nach Lax-Friedrichs genutzt werden. Auch in [10] wird eine abgewandelte Version davon betrachtet

$$f^{num}(u, v, n) := f\left(\frac{u+v}{2}\right) \cdot n - \alpha \frac{u-v}{2}. \quad (20)$$

α ist problemabhängig in diesem Fall aber konstant. Des Weiteren sind die in (19) mit + bzw. - indizierten Größen als

$$v^{\pm} := \lim_{\tau \rightarrow 0} v(x \pm \tau n_k) \quad (21)$$

definiert. Dabei wird v an der Kante Γ_k eines Elements ausgewertet und n_k ist die zu der Kante gehörende und nach außen gerichtete Normale. Diese Größen sind in Abb. 2 veranschaulicht.

Das DG Verfahren zeichnet sich durch seine hohe Fehlerordnung aus. In der L^2 -Norm und bei einer geeigneten Triangulierung ist die Ordnung $O(h^{n_p+1})$ [3].

3.2. Hybride Gemischte Finite Elemente (GFE) Verfahren

Bei Vernachlässigung des konvektiven Terms in (14) ergibt sich ein reines Diffusionsproblem, für dessen Diskretisierung ein GFE Ansatz gewählt werden kann. Bei diesem

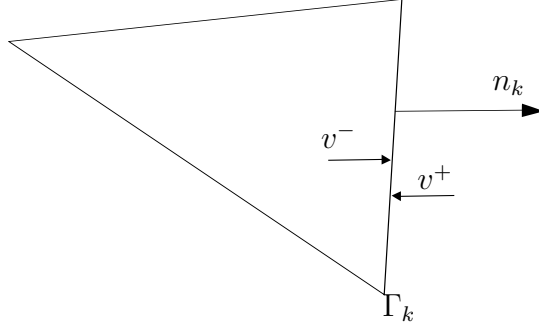


Abbildung 2: Graphische Darstellung von v^\pm

Ansatz werden approximative Lösungen (σ_h, w_h) zu $(\varepsilon \nabla w, w)$ aus entsprechenden Räumen, welche später spezifiziert werden, gesucht [4]. In starker und gemischter Form dargestellt lautet das Problem

$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon \nabla w & \forall x \in \Omega \\ -\nabla \cdot \sigma &= h & \forall x \in \Omega \\ w &= g & \forall x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (22)$$

Überführt in die schwache Form ergibt sich das Problem mit diskreten Variablen zu, finde $(\sigma_h, w_h) \in H_h \times V_h$, sodass

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau_h + \varepsilon w_h \nabla \cdot \tau_h dx - \varepsilon \int_{\partial\Omega} w_h \tau_h \cdot n d\sigma &= 0 \\ - \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_h \varphi_h dx &= \int_{\Omega} h \varphi_h dx \end{aligned} \quad (23)$$

für alle $(\tau_h, \varphi_h) \in H_h \times V_h$ erfüllt ist. Nach Einführung einer Triangulierung wie in Kapitel 3.1 kann V_h analog zu (18) definiert werden. Nach (22) existiert die Divergenz von σ auf ganz Ω . Diese Stetigkeitsbedingung wird bei GFE Verfahren im Raum, aus welchen σ stammt, verankert. Formal ist $\sigma \in H(Div, \Omega)$, wobei H als $H := \{f \in L^2(\Omega) \mid \nabla \cdot f \in L^2(\Omega)\}$ definiert ist [2, 10]. Im Hinblick auf eine Hybridisierung, welche die Eliminierung von Freiheitsgraden beabsichtigt, ist die Stetigkeit von σ auf ganz Ω jedoch hinderlich. Aus diesem Grund wird in [10] H_h ähnlich zu V_h definiert, während die Stetigkeitsbedingung in schwacher Form erfüllt wird. Zusätzlich muss ein hybrider Raum M_h eingeführt werden. Für H_h und M_h gilt

$$\begin{aligned} H_h &:= \{f \in L^2(\Omega) \mid f|_{\Omega_k} \in \Pi^{n_p+1}(\Omega_k) \quad \forall k = 1, \dots, N_e\}, \\ M_h &:= \{f \in L^2(\Gamma) \mid f|_{\Gamma_k} \in \Pi^{n_p+1}(\Gamma_k) \quad \forall k = 1, \dots, N_f\}. \end{aligned} \quad (24)$$

N_e entspricht abermals der Anzahl der Elemente und N_f die der Kanten, sowohl derer die auf dem physikalischen Rand liegen, als auch der Kanten im Inneren von Ω . Das hybride GFE Verfahren ergibt sich zu. Finde $(\sigma_h, w_h, \lambda_h) \in H_h \times V_h \times M_h$, sodass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_e} \left(\int_{\Omega_k} \sigma_h \cdot \tau_h + \varepsilon w_h \nabla \cdot \tau_h dx - \varepsilon \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} \lambda_h \tau_h^- \cdot n d\sigma \right. \\
\left. - \varepsilon \int_{\partial\Omega_k \cup \partial\Omega} g \tau_h^- \cdot n d\sigma \right) = 0 \\
- \int_{\Omega} \nabla \cdot \sigma_h \varphi_h dx = \int_{\Omega} h \varphi_h dx \\
\int_{\Gamma_0} \mu_h (\sigma_h^- \cdot n - \sigma_h^+ \cdot n) d\sigma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \mu_h (\lambda_h - g) d\sigma = 0
\end{aligned} \tag{25}$$

für alle $(\tau_h, \varphi_h, \mu_h) \in H_h \times V_h \times M_h$ erfüllt ist. Hierbei ist Γ die Menge aller Kanten und $\Gamma \setminus \Gamma_0$ die Menge aller Kante, die auf dem Rand von Ω liegen. Die Stetigkeit von σ wird durch den ersten Term in der letzten Gleichung von (25) im schwachen Sinn erzwungen. Der zweite Term in dieser Gleichung stellt sicher, dass λ_h auf dem Rand von Ω gleich der L^2 -Projektion von g auf M_h ist. Auch in dieser Diskretisierung wird wie in Kapitel 3.1 über die Elemente integriert und anschließend aufsummiert, sodass sich wiederum eine Unterscheidung für die Randintegrale ergibt. In diesem Fall wird w_h auf dem Rand eines Elements jedoch durch λ_h ersetzt. Die Definition der mit \pm indizierten Größen ist wie in Kapitel 3.1.

Der Vorteil der gewählten Räume wird nun ausgenutzt, indem das in (25) beschriebene Problem in eine nur von λ_h abhängende Form gebracht werden kann. Das neue hybride Problem hat weniger Unbekannte als (25) und folgende Form

$$\hat{A}_1(\lambda_h, \mu_h) = \hat{b}_1(\mu_h) \quad \forall \mu_h \in M_h. \tag{26}$$

3.3. Hybride Diskontinuierliche Galerkin (HDG) Verfahren

Auch das in Kapitel 3.1 beschriebene DG Verfahren lässt sich hybridisieren. Dazu wird im numerischen Fluss (vgl. (20)) eine Hilfsvariable λ mit $\lambda = \frac{u+v}{2}$ eingeführt. Für den Fluss ergibt sich somit

$$f^{num}(\lambda, w, n) := f(\lambda) \cdot n - \alpha(\lambda - v). \tag{27}$$

Da λ einen Mittelwert von w_h auf den Kanten der Triangulierung darstellt, kann es mit einem $\lambda_h \in M_h$ approximiert werden. Das HDG Verfahren ergibt sich dann zu. Finde (w_h, λ_h) aus $V_h \times M_h$, sodass

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N_e} \left(- \int_{\Omega_k} f(w_h) \cdot \nabla \varphi_h dx + \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} \varphi_h^- f^{num}(\lambda_h, w^-, n) d\sigma \right. \\
\left. + \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega} \varphi_h^- f(w_{\partial\Omega}(\lambda_h)) \cdot n d\sigma \right) = 0 \\
\int_{\Gamma_0} \alpha \mu_h (2\lambda_h - w_h^- - w_h^+) d\sigma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \mu_h (\lambda_h - w_{\partial\Omega}(w_h^-)) d\sigma = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

für alle (φ, μ_h) aus $V_h \times M_h$ erfüllt ist. Der wesentliche Unterschied in (28) zu (19) besteht darin, dass w_h auf den Elementrändern durch λ_h ersetzt wurde. Außerdem wird durch die letzte Gleichung in (28) λ_h auf dem Elementrand gleich $\frac{w_h^+ + w_h^-}{2}$ gesetzt. Der letzte Term sorgt zusätzlich dafür, dass λ_h in Analogie zu (25) die Randbedingung erfüllt.

Wieder lässt sich dieses Problem aufgrund der Hybridisierung und den gewählten Räumen in ein nur von λ_h abhängiges System

$$\hat{A}_2(\lambda_h, \mu_h) = \hat{b}_1(\mu_h) \quad \forall \mu_h \in M_h \quad (29)$$

überführen. Auch die Hybridisierung des DG Verfahrens bringt eine Reduktion der Freiheitsgrade mit sich. Die zu den Problemen (26) und (29) gehörenden Matrizen sind zwar teurer in der Zusammensetzung, aber insgesamt ergibt sich eine Reduktion des Rechenaufwandes im Vergleich zu den ursprünglichen Problemen. Die gesuchten Größen w_h bzw. w_h und σ_h lassen sich aus λ_h wieder Rekonstruieren.

Ein weiterer Vorteil der hybridisierten Probleme ist, dass sowohl die Lösung des Konvektionsproblems aus (15), als auch die des Diffusionsproblems aus (22) im gleichen Raum liegt und so eine Anwendung beider Ansätze auf die in (14) eingeführte KDG möglich ist. Überführt in die gemischte Form

$$\begin{aligned} \sigma &= \varepsilon \nabla w & \forall x \in \Omega \\ \nabla \cdot (f(w) - \sigma) &= h & \forall x \in \Omega \\ w &= g & \forall x \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (30)$$

kann dann das Problem in schwacher Form wie folgt formuliert werden. Finde $(w_h, \sigma_h, \lambda_h) \in V_h \times H_h \times M_h$, sodass

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_e} \left(\int_{\Omega_k} \sigma_h \cdot \tau_h + \varepsilon w_h \nabla \cdot \tau_h dx - \varepsilon \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} \lambda_h \tau_h^- d\sigma - \varepsilon \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} g \tau_h^- \cdot n d\sigma \right) &= 0 \\ \sum_{k=1}^{N_e} \left(- \int_{\Omega} f(w_h) \cdot \nabla \varphi_h dx + \int_{\partial\Omega_k \setminus \partial\Omega} \varphi_h^- \underbrace{f^{num}(\lambda_h, w_h^-, n)}_{:= f(\lambda_h) \cdot n - \alpha(\lambda_h - w_h^-)} d\sigma \right. & \\ \left. + \int_{\partial\Omega_k \cap \partial\Omega} \varphi_h^- f(g) \cdot n d\sigma - \int_{\Omega_k} \nabla \cdot \sigma_h \varphi_h dx \right) &= \int_{\Omega} h \varphi_h dx \\ \int_{\Gamma_0} \mu_h (\sigma_h^- \cdot n - \sigma_h^+ \cdot n + \alpha(2\lambda_h - w_h^- - w_h^+)) d\sigma + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_0} \mu_h (\lambda_h - g) d\sigma &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

für alle $(\varphi_h, \tau_h, \mu_h) \in V_h \times H_h \times M_h$ erfüllt ist. Die Terme, die aus der Diskretisierung des konvektiven Anteils entstehen, sind in **rot** eingefärbt, während die Terme, die auf den Diffusionsanteil zurück zu führen sind, in **blau** dargestellt sind.

Der schwarze Term am Ende handhabt die Dirichlet-Randbedingung und ist bereits in beiden vorherigen Problemen behandelt worden. Neu ist lediglich der vorletzte Term in der letzten Gleichung, welcher erzwingt, dass λ_h auf dem Rand der Elemente

$$\lambda_h = \frac{w_h^- + w_h^+}{2} - \frac{\sigma_h^- \cdot n - \sigma_h^+ \cdot n}{2\alpha} \quad (32)$$

erfüllt. Genauer entspricht λ_h der L^2 -Projektion der rechten Seite von (32) auf den hybriden Raum M_h .

Das **H**ybride **D**iskontinuierliche **G**alerkin (HDG) Verfahren für die KDG kann ebenfalls in ein nur von λ_h abhängende Form überführt werden. Das Problem hat somit die folgende Form. Finde $\lambda_h \in M_h$, sodass

$$\hat{A}(\lambda_h, \mu_h) = \hat{b}(\mu_h) \quad (33)$$

für alle $\mu_h \in M_h$ erfüllt ist. Die Reduktion der Freiheitsgrade kann mit Verfahren wie der statischen Kondensation oder sogenannten „Lifting“ Operationen erreicht werden [10]. Die Grundidee hinter diesen Verfahren ist die Freiheitsgrade im Inneren als lineare Kombination der Äußeren darzustellen und diese somit zu eliminieren. Dazu müssen lokal kleine Gleichungssysteme gelöst werden. Dies macht das Zusammensetzen der Lösungsmatrizen rechenintensiver, führt, bei einer geeigneten Problemgröße, allerdings zu einer Reduktion des gesamten Rechenaufwandes, da die Größe des zu lösenden Gleichungssystems abnimmt. Die Reduktion ist in Abbildung 3 graphisch veranschaulicht.

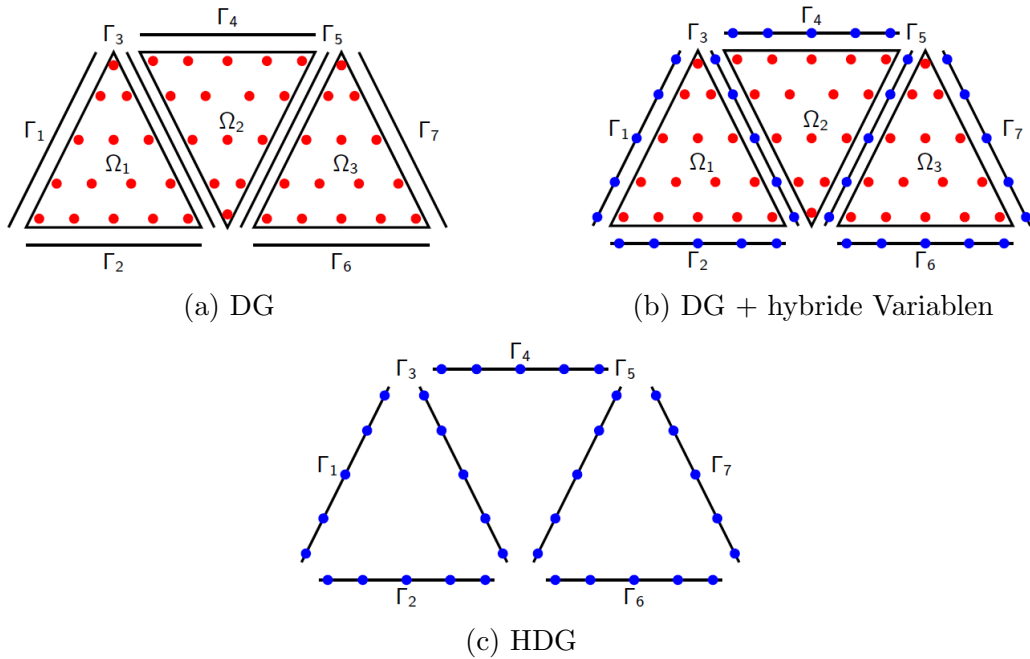


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Reduktion der Freiheitsgrade

In Abb. 3a sind die Freiheitsgrade eines Standard DG Verfahrens im Inneren eines

Beispielelemente dargestellt. Die blauen Punkte in Abb. 3b stellen die, durch die Hybridisierung eingeführten zusätzlichen Freiheitsgrade dar. Werden die ursprünglichen Freiheitsgrade des DG Verfahrens durch beispielsweise statische Kondensation entfernt, so ergibt sich Abb. 3c. Durch die Verlagerung der Unbekannten aus den Elementen auf die Kanten skaliert die Anzahl dieser auch mit der Anzahl der Kanten und nicht, wie im DG Verfahren, mit der der Zellen. Dieser Zusammenhang ist in folgender Gleichung formuliert.

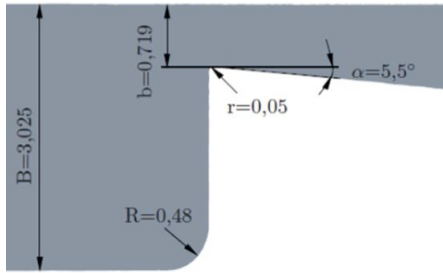
$$\begin{aligned} \text{DG Verfahren} &: O(N_e \cdot n_p^d) \\ \text{HDG Verfahren} &: O(N_f \cdot n_p^{d-1}) \end{aligned} \tag{34}$$

Das Ergebnis ist interessant, da Lösungen von hochdimensionierten Problemen eine sehr hohe Anzahl an Freiheitsgraden mit sich bringen. Die Berechnungen sind somit sehr teuer, sodass eine hohe Ordnung meist nicht möglich ist. Das HDG Verfahren besitzt allerdings die hohe Ordnung des DG Verfahrens, während es gleichzeitig eine Reduktion des Rechenaufwands ermöglicht.

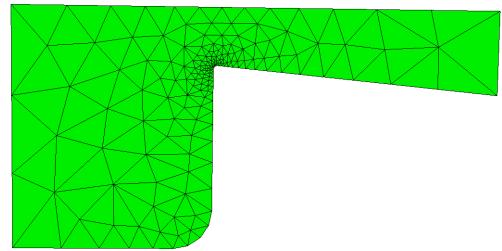
4. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend ist das HDG Verfahren eine elegante Möglichkeit zur Diskretisierung von KDP, da es durch Hybridisierung die Diskretisierungsansätze für den Konvektions- und den Diffusionsanteil verbindet, die auch genutzt werden wenn die Probleme einzeln vorliegen. Ein weiterer positiver Aspekt des Verfahrens ist die, mit der Hybridisierung einhergehende, Reduktion der Unbekannten im zu lösenden Gleichungssystem und des damit verbundenen Rechenaufwands. Diese Eigenschaften machen es besonders interessant für die Strömungsmechanik und die Lösung der NSG, insbesondere bei Verwendung impliziter Lösungstechniken. Das vorgestellte Kavitationsmodell bietet eine gute Anwendung für dieses Verfahren. Das algebraische Modell hat den Vorteil, dass es vergleichsweise einfach ist und lediglich bei der Auswertung der physikalische Flüsse angreift.

Der nächste Schritt ist das Testen des implementierten Kavitationsmodells. Zu diesem Zweck kann unter anderem die Durchströmung eines „micro channels“ mit einer Stufe, wie er bereits in [6] genutzt wurde, gewählt werden. In einem weiteren Paper [7] wurden für den gleichen Testaufbau experimentelle Ergebnisse vorgestellt, sodass diese zur Validierung möglicher Ergebnisse genutzt werden könnten. In Abbildung 4 ist die Geometrie und ein Rechengitter des „micro channels“ zu sehen.



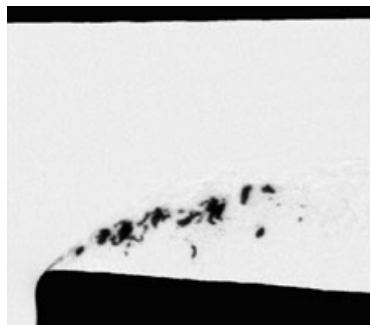
(a) Geometrie



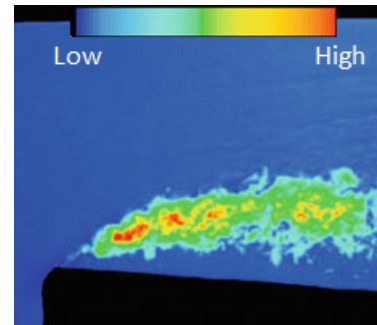
(b) Rechengitter

Abbildung 4: Geometrie und Rechengitter des Testfalls

Bei einem Versuch in [7] wurde, am dargestellten “micro channel“ und einer Strömung mit einem Druckabfall von 40bar, Kavitation beobachtet. Dabei herrschte am Einlass ein Druck von 100bar und eine Temperatur von 308K. Aufnahmen der Strömung sind in Abb. 5 dargestellt.



(a) Einzelaufnahme einer Kavitationsverteilung



(b) Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Phasenübergang

Abbildung 5: Kavitationsaufnahmen am “micro channel“ [7]

Abb. 5a stellt eine Momentaufnahme einer kavitierenden Strömung dar, während in Abb. 5b eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen Übergang von einer Phase in die Andere abgebildet ist. Reine Flüssigkeit und reines Gas werden dabei durch blaue Bereiche gekennzeichnet. Bereiche in denen eine hohe Wahrscheinlichkeit für einen Phasenübergang besteht sind in rot dargestellt. Somit ist bei einem Test des Modells unter diesen Bedingungen mit Kavitation in den roten und gelben Bereichen, die sich am Übergang der Grenzschicht zur Strömung befinden, zu rechnen.

A. Anhang

In diesem Kapitel sollen noch kurz einige für die Implementierung relevanten Details aufgegriffen werden. Dabei sind insbesondere die physikalischen Flüsse und da ein nicht lineares Problem mit einem Newton-Algorithmus gelöst wird, ihre Ableitungen relevant. Außerdem arbeitet der bestehende Code des MathCCES mit normierten Werten, wofür das Modell aus [6] noch angepasst werden muss.

A.1. Die physikalischen Flüsse und Ableitungen

Der bestehende HDG FEM Code des Instituts kann zur Lösung von KDG genutzt werden. Dabei wird die zu lösende Gleichung lediglich über ihre physikalischen Flüsse charakterisiert. Dies ist möglich, da bei der Auswertung der numerischen Flüsse auch die physikalischen Flüsse ausgewertet werden. Für die Implementierung des Kavitationsmodells bedeutet dies, dass eine nichtinvasive Herangehensweise möglich ist. In diesem Abschnitt sollen deshalb kurz die Änderungen an den Flüssen und deren Ableitungen erörtert werden. In Gleichung (35) sind zu diesem Zweck noch einmal die stationären NSG in einer Flussformulierung gegeben.

$$\nabla \cdot (f(w) - f_v(w, \nabla w)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (35)$$

In zwei Raumdimensionen sind die passenden Flüsse

$$\begin{aligned} f_1 &= (\rho u, p + \rho u^2, \rho uv, u\rho H)^T \\ f_2 &= (\rho v, \rho uv, p + \rho v^2, v\rho H)^T \\ H &= E_{spec} + \frac{p}{\rho}, \quad E_{spec} = \frac{E}{\rho} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} f_{v,1} &= (0, \tau_{11}, \tau_{21}, u\tau_{11} + v\tau_{12} + k\partial_{x_1} T)^T \\ f_{v,2} &= (0, \tau_{12}, \tau_{22}, u\tau_{21} + v\tau_{22} + k\partial_{x_2} T)^T. \end{aligned} \quad (37)$$

Der Spannungstensor ist in seiner einfachste Form

$$\tau = \mu \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\partial_{x_1} u - \frac{2}{3}\partial_{x_2} v & \partial_{x_2} u + \partial_{x_1} v \\ \partial_{x_1} v + \partial_{x_2} u & \frac{4}{3}\partial_{x_2} v - \frac{2}{3}\partial_{x_1} u \end{pmatrix} \quad (38)$$

ebenfalls rekapituliert. Da das Kavitationsmodell nur an der Druckgleichung und der Viskosität angreift sind auch nur an diesen Stellen der physikalischen Flüsse Änderungen von Nöten. Für die Auswertung der Flüsse wird der Druck aus dem Kavitationsmodell bestimmt. Für die Ableitung der Flüsse wird die Kettenregel ausgenutzt. Da das Modell barotropisch ist, kann jede Ableitung des Druckterms als

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (39)$$

bestimmt werden. Analog gilt das für die Viskosität, mit einer zusätzlichen Verkettung über α . Die Druckfunktion, die durch das Modell im Code genutzt wird, ist eine stückweise definierte und stetige, aber nicht stetig differenzierbare Funktion Abb. 6. In den Gleichungen (40) – (42) ist der Ablauf zur Bestimmung des Drucks noch einmal wiedergegeben.

$$\alpha = \frac{V_{vap}}{V} = \begin{cases} 0, & \bar{\rho} \geq \rho_{sat,liq} \\ \frac{\rho_{sat,liq} - \bar{\rho}}{\rho_{sat,liq} - \rho_{sat,vap}}, & \bar{\rho} < \rho_{sat,liq} \end{cases} \quad (40)$$

$$\bar{p} = (p_{sat} + B) \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_{sat,liq}} \right)^N - B, \quad \alpha = 0 \quad (41)$$

$$\bar{p} = p_{sat} + C \left(\frac{1}{\rho_{sat,liq}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (42)$$

Die Ableitung des Druckes ist im klassischen Sinn nicht definiert. Im Code werden die Ableitungen der einzelnen Druckfunktionen verwendet. Dabei wird am Phasenübergang die selbe Unterscheidung getroffen wie bei der Auswertung. Somit ist die benutzte Funktion

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \begin{cases} (p_{sat} + B) \frac{N}{\rho_{sat,liq}} \left(\frac{\rho}{\rho_{sat,liq}} \right)^{N-1} & , \rho \geq \rho_{sat,liq} \\ \frac{C}{\rho^2} & , \rho < \rho_{sat,liq} \end{cases} \quad (43)$$

unstetig und stückweise definiert. Der Verlauf des Drucks und dessen Ableitung sind in Abb. 6 dargestellt.

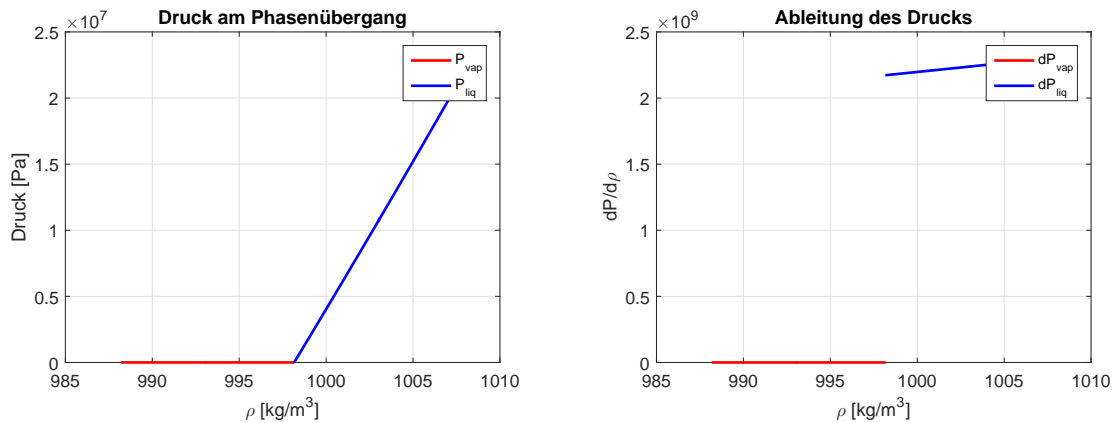


Abbildung 6: Verlauf und Ableitung der barotropischen Druckfunktion des Modells am Phasenübergang

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Unstetigkeit der verwendeten Ableitung zu einer langsameren Konvergenz des Newton-Algorithmus und zu numerischen Instabilitäten und Oszillationen führen kann.

Für die Ableitung der Viskosität gilt außerdem

$$\frac{\partial \mu}{\partial \rho} = \frac{\partial \mu}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = \frac{-1}{\rho_{sat,liq} - \rho_{sat,vap}} \left(\mu_{vap} + \frac{\mu_{liq}}{2} (3 - 10\alpha) \right). \quad (44)$$

A.2. Normieren des Kavitationsmodells

Der HDG Code des MatheCCES nutzt bei der Berechnung nur normierte Größen. So musste bei der Implementierung des Kavitationsmodells auch dieses normiert werden. Der einfachste Weg das Modell zu normieren ist dies im Preprocessing zu tun. Also die im Modell genutzten Werte im Vorfeld mit dem Druck und der Dichte der an strömenden Flüssigkeit zu normieren und diese dann einzulesen. Die Entdimensionalisierung der Druckgleichungen und der Gleichung für den volumetrischen Dampfanteil ist in den (46) und (48) skizziert. Dabei werden die Normierungen

$$\hat{p} = \frac{\bar{p}}{p_\infty}, \quad \hat{\rho} = \frac{\bar{\rho}}{\rho_\infty}, \quad (45)$$

bedingt durch den Code, benötigt. $\hat{\cdot}$ bezeichnet hier die dimensionslosen Größen. Durch Einsetzen dieser Zusammenhänge ergeben sich die normierten Parameter des Modells. Für $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\rho_{sat,liq} - \bar{\rho}}{\rho_{sat,liq} - \rho_{sat,vap}} \\ &= \frac{\rho_{sat,liq} - \hat{\rho} \cdot \rho_\infty}{\rho_{sat,liq} - \rho_{sat,vap}} \\ &= \frac{\frac{\rho_{sat,liq}}{\rho_\infty} - \hat{\rho}}{\frac{\rho_{sat,liq}}{\rho_\infty} - \frac{\rho_{sat,vap}}{\rho_\infty}} \\ &= \frac{\hat{\rho}_{sat,liq} - \hat{\rho}}{\hat{\rho}_{sat,liq} - \hat{\rho}_{sat,vap}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Daraus ergeben sich $\hat{\rho}_{sat,liq} = \frac{\rho_{sat,liq}}{\rho_\infty}$ und $\hat{\rho}_{sat,vap} = \frac{\rho_{sat,vap}}{\rho_\infty}$. Einsetzen in die Druckgleichung der Flüssigkeit liefert

$$\begin{aligned} \hat{p} \cdot p_\infty &= (p_{sat} + B) \left(\frac{\hat{\rho} \cdot \rho_\infty}{\rho_{sat,liq}} \right)^N - B \\ \Leftrightarrow \hat{p} &= \frac{(p_{sat} + B)}{p_\infty} \left(\frac{\hat{\rho}}{\frac{\rho_{sat,liq}}{\rho_\infty}} \right)^N - \frac{B}{p_\infty} \\ &= \left(\hat{p}_{sat} + \hat{B} \right) \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}_{sat,liq}} \right)^N - \hat{B}. \end{aligned} \quad (47)$$

Mit den normierten Konstanten $\hat{B} = \frac{B}{p_\infty}$ und $\hat{p}_{sat} = \frac{p_{sat}}{p_\infty}$. Für die Druckgleichung im Zweiphasengebiet ergibt sich

$$\begin{aligned}
\bar{p} &= p_{sat} + C \left(\frac{1}{\rho_{sat,liq}} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right) \\
&= p_{sat} + C \left(\frac{\bar{\rho} - \rho_{sat,liq}}{\bar{\rho}\rho_{sat,liq}} \right) \\
\Leftrightarrow \hat{p} \cdot p_\infty &= p_{sat} + C \left(\frac{\hat{\rho} \cdot \rho_\infty - \rho_{sat,liq}}{\hat{\rho}\rho_\infty\rho_{sat,liq}} \right) \\
\Leftrightarrow \hat{p} &= \frac{p_{sat}}{p_\infty} + \frac{C}{p_\infty \cdot \rho_\infty} \left(\frac{\hat{\rho} \cdot \rho_\infty - \rho_{sat,liq}}{\hat{\rho}\rho_{sat,liq}} \right) \\
&= \frac{p_{sat}}{p_\infty} + \frac{C}{p_\infty \cdot \rho_\infty} \left(\frac{\hat{\rho} - \frac{\rho_{sat,liq}}{\rho_\infty}}{\hat{\rho} \frac{\rho_{sat,liq}}{\rho_\infty}} \right) \\
&= \hat{p}_{sat} + \hat{C} \left(\frac{\hat{\rho} - \hat{\rho}_{sat,liq}}{\hat{\rho}\hat{\rho}_{sat,liq}} \right) \\
&= \hat{p}_{sat} + \hat{C} \left(\frac{1}{\hat{\rho}_{sat,liq}} - \frac{1}{\hat{\rho}} \right).
\end{aligned} \tag{48}$$

Mit der Konstanten $\hat{C} = \frac{C}{p_\infty \cdot \rho_\infty}$. Für die Viskosität gilt im Modell

$$\bar{\mu} = (1 - \alpha) \left(1 + \frac{5}{2}\alpha \right) \mu_{liq} + \alpha \mu_{vap}. \tag{49}$$

Da α dimensionslos ist reicht es zur Entdimensionalisierung der Viskosität die Viskositäten des Dampfes und der Flüssigkeit zu normieren. Diese können aus der Reynoldszahl mit

$$\hat{\mu}_{liq/vap} = \frac{\hat{\rho}_{sat,liq/vap} \cdot \text{Mac}_\infty L}{\text{Re}}. \tag{50}$$

bestimmt werden. Dabei wird die Reynoldszahl Re , die Machzahl Ma , die normierte Schallgeschwindigkeit in der Anströmung c_∞ , eine dimensionslose Referenzlänge L und die normierte Sättigungsdichte der Flüssigkeit $\hat{\rho}_{sat,liq}$ bzw. des Dampfes $\hat{\rho}_{sat,vap}$ genutzt. c_∞ wird dabei durch

$$c_\infty^2 = \frac{d\hat{p}}{d\hat{\rho}} \tag{51}$$

aus der normierten Druckgleichung für die Flüssigkeit bestimmt.

Literatur

- [1] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified Analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. NUMER. ANAL.* 2002 *Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 39, No. 5, pp. 1749–1779*, 2002.
- [2] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics, 1991.
- [3] B. Cockburn, B. Dong, and J. Guzman. Optimal Convergence of the original DG Method for the Transport-Reaction Equation of special Meshes. *AMS subject classifications. 65N30, 65M60*.
- [4] B. Cockburn and J. Gopalakrishnan. A Characterization of Hybridized Mixed Methods for Second Order Elliptic Problems. *SIAM J. NUMER. ANAL.* c 2004 *Society for Industrial and Applied Mathematics Vol. 42, No. 1, pp. 283–301*, 2004.
- [5] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. *The Finite Volume Method Handbook of Numerical Analysis*. 2000.
- [6] S. Hickel, M. Mihatsch, and S. Schmidt. Implicit Large Eddy Simulation of Cavitation in Micro Channel Flows. *WIMRC 3rd International Cavitation Forum 2011*, 2011.
- [7] U. Iben, A. Morozov, E. Winklhofer, and F. Wolf. Laser-pulse interferometry applied to high-pressure fluid flow in micro channels. 2010.
- [8] S. Müller. Discontinuous Galerkin Finite Element Methods for Conservation Laws. Lecture Notes. 2014.
- [9] W. Reed and T. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. *Tech. Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory*, 1973.
- [10] J. Schütz and G. May. A hybrid mixed method for the compressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics* 240 (2013) 58–75, 2013.
- [11] T. Trummler. Gasmodellierung in kavitierenden Strömungen. Master’s thesis, Lehrstuhl für Aerodynamik und Strömungsmechanik, Technische Universität München, 2014.