Prof. Dr. Martin Frank
Prof. Dr. Martin Grepl

# Mathematische Grundlagen IV (CES) | SS 2017
# Musterlösung Klausur | 08.08.2017

**Aufgabe 1.**

Leiten Sie für die folgende partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} &= 0 \quad \text{für } (x,y) \in \,]-\infty,\infty[\, \times \,]0,1[\,, \\ u(x,0) &= 0 \quad \text{für } x \in \,]-\infty,\infty[\,, \\ u(x,1) &= f(x) \quad \text{für } x \in \,]-\infty,\infty[\,, \end{aligned}$$

auf dem unendlichen Streifen mittels der Fourier-Transformation eine Lösungsformel her.

**5 Punkte**

**Lösung.**

Wir führen die Fouriertransformation in der Variablen $x$ durch, so dass wir die Gleichung

$$-s^2\tilde{u}(s,y) + \partial_y^2\tilde{u}(s,y) = 0$$

**1 Punkt**

erhalten. Hierbei handelt es sich um eine gewöhnliche Differentialgleichung, welche die Lösung

$$\tilde{u}(s,y) = A(s)e^{sy} + B(s)e^{-sy}$$

**1 Punkt**

besitzt. Aus $\tilde{u}(s,0) = A(s) + B(s) \overset{!}{=} 0$ folgt $A(s) = -B(s)$. Somit gilt

$$\tilde{u}(s,y) = A(s)e^{sy} - A(s)e^{-sy} = 2A(s)\sinh(sy).$$

**0.5 Punkte**

Aus den Randwerten folgt

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s,1) &= 2A(s)\sinh(s) \overset{!}{=} \tilde{f}(s) \\ \Rightarrow A(s) &= \frac{1}{2}\frac{\tilde{f}(s)}{\sinh(s)}. \end{aligned}$$

**1 Punkt**

Und wir erhalten

$$\tilde{u}(s,y) = \tilde{f}(s)\frac{\sinh(sy)}{\sinh(s)}.$$

**0.5 Punkte**

Die Rücktransformation ergibt dann

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s)\frac{\sinh(sy)}{\sinh(s)}e^{isx}\,ds.$$

**1 Punkt**

**Aufgabe 2.**

Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = 0 \text{ in } ]0,1[ \times ]0,1[\,, \\ u(x,0) & = \sin(2\pi x) \text{ für } x \in ]0,1[ \\ u(x,1) & = 0 \text{ für } x \in ]0,1[\,, \\ u(0,y) & = 0 \text{ für } x \in ]0,1[\,, \\ u(1,y) & = 0 \text{ für } x \in ]0,1[\,. \end{cases}$$

Nutzen Sie dazu die Methoden, die Ihnen aus der Vorlesung bekannt sind.

**7 Punkte**

**Lösung.**

Wir nehmen an, dass sich die Lösung $u$ schreiben lässt als $u(x,y) = X(x)Y(y)$.

**0.5 Punkte**

Daraus ergibt sich durch einsetzen in die PDE

$$\begin{aligned} & - X''Y - XY'' + XY = 0 \\ \Leftrightarrow & - \frac{X''}{X} + 1 = \frac{Y''}{Y} \end{aligned}$$

**1 Punkt**

Da in der zweiten Zeile die linke Seite der Gleichung nur von $x$ abhängt und die rechte Seite der Gleichung nur von $y$ abhängt wissen wir, dass die linke bzw. reche Seite konstant sein müssen. Es gilt also

$$-\frac{X''}{X} + 1 = \lambda = \frac{Y''}{Y}$$

**0.5 Punkte**

Wir betrachten nun unterschiedliche Fälle für $\lambda$

- $\lambda = 1$.
  Daraus folgt $-X'' = X \Rightarrow X(x) = ax + b$ und unter Berücksichtigung der Randwerte somit $X(x) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ und es ergibt sich ein Widerspruch.

  **0.5 Punkte**

- $\lambda < 1$.
  Hier folgt, dass $X(x)$ die Lösungsform $X(x) = ae^{bx} + ce^{-bx}$ annehmen wird. Den Randwerten entnehmen wir, dass $X(x) = a\sin(bx) + c\sin(bx)$ sein muss. Daher verwerfen wir diesen Ansatz.

  **0.5 Punkte**

- $\lambda > 1$.
  Daraus ergibt sich $-X''/X = \lambda - 1 =: \gamma^2$ und wir lösen

  $$X(x) = A\sin(\gamma x) + B\cos(\gamma x).$$

  **0.5 Punkte**

  Aus $X(0) = B$ zusammen mit den Randwerten($\overset{!}{=}$ 0) ergibt sich $B = 0$. Für $X(1) = A\sin(\gamma)$ ergibt sich zusammen mit den Randwerten($\overset{!}{=}$ 0) $\gamma_k = \pi k$. Somit gibt es mehrere Lösungen, abhängig von $\gamma_k$, nämlich

  $$X_k(x) = A_k \sin(\pi k x).$$

  **0.5+0.5 Punkte**

Für $Y$ gilt $Y''/Y = \lambda = 1 + \gamma_k^2 =: \delta_k^2 > 0$. Lösungen sind somit gegeben durch

$$Y_k(y) = C_k e^{\delta_k y} + D_k e^{-\delta_k y}.$$

**0.5 Punkte**

Es folgt aus den Randwerten

$$\begin{aligned} Y_k(0) = C_k + D_k &\overset{!}{=} 1, \\ Y_k(1) = C_k e^{\delta_k} + D_k e^{-\delta_k} &\overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

**0.5 Punkte**

(Hier hätte in der ersten Zeile auch Gleichheit mit einer beliebigen anderen Konstante ungleich null gewählt werden können. Diese Wahl wäre dann im weiteren Verlauf mit $A_k$ verrechnet worden.) Das System lässt sich lösen und man erhält

$$\begin{aligned} C_k &= -\frac{1}{e^{\delta_k^2} - 1}, \\ D_k &= \frac{e^{\delta_k^2}}{e^{\delta_k^2} - 1}. \end{aligned}$$

**0.5 Punkte**

Für die Gesamtlösung erhalten wir insgesamt durch Superposition der Teillösungen

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_k X_k(x) Y_k(y) \\ &= \sum_k A_k \sin(\pi k x) \left[ C_k e^{\delta_k y} + D_k e^{-\delta_k y} \right] \end{aligned}$$

**0.5 Punkte**

Der Vergleich mit den Randwerten zeigt, dass $A_k = 0$ für $k \neq 2$, und somit folgt

$$u(x,y) = \sin(2\pi x) \left[ C_2 e^{\sqrt{1+4\pi} y} + D_2 e^{-\sqrt{1+4\pi} y} \right]$$

**0.5 Punkte**

mit

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{1}{e^{1+4\pi} - 1}, \\ D_2 &= \frac{e^{1+4\pi}}{e^{1+4\pi} - 1}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.**
Lösen Sie die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= x^2 - t^2, \\ u(0,x) &= \frac{1}{2}(7e^x - 3e^{-x}), \\ u_t(0,x) &= -e^x + 3e^{-x}. \end{aligned}$$

Nutzen Sie dazu die Methoden, die Ihnen aus der Vorlesung bekannt sind.

**6 Punkte**

**Lösung.**
Wir berufen uns auf Korollar 1.41 aus der Vorlesung. Demnach ist die Lösung $u$ gegeben als $u = v + w$,

**0.5 Punkte**

wobei $v$ und $w$ Lösungen der Probleme

$$\begin{aligned} v_{tt} - v_{xx} &= 0, \\ v(0,x) &= \frac{1}{2}(7e^x - 3e^{-x}), \\ v_t(0,x) &= -e^x + 3e^{-x} \end{aligned}$$

**0.5 Punkte**

und

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= x^2 - t^2, \\ w(0,x) &= 0, \\ w_t(0,x) &= 0 \end{aligned}$$

**0.5 Punkte**

sind.
Wir lösen zuerst für $v$. Sei $g = \frac{1}{2}(7e^x - 3e^{-x})$ und $h = -e^x + 3e^{-x}$, so ist $v$ gegeben durch die d'Alembertsche Formel als

$$\begin{aligned} v(t,x) =& \frac{1}{2}\left[g(x-t) + g(x+t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)\,dy \\ =& \frac{1}{4}\left[7e^{x-t} + 7e^{x+t} - 3e^{-x+t} - 3e^{-x-t}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} -e^x + 3e^{-x}\,dx \\ =& \frac{1}{4}\left[7e^{x-t} + 7e^{x+t} - 3e^{-x+t} - 3e^{-x-t}\right] \\ &+ \frac{1}{2}\left[-e^x - 3e^{-x}\right]_{x-t}^{x+t} \\ =& \frac{1}{4}\left[7e^{x-t} + 7e^{x+t} - 3e^{-x+t} - 3e^{-x-t}\right] \\ &- \frac{1}{2}\left[e^{x+t} - e^{x-t} + 3e^{-x-t} - 3e^{-x+t}\right] \\ =& \frac{9}{4}e^{x-t} + \frac{5}{4}e^{x+t} + \frac{3}{4}e^{-x+t} - \frac{9}{4}e^{-x-t}. \end{aligned}$$

**2 Punkte**

für $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$.

Für $w$ erhalten wir nach Satz 1.40 und mit $f(t,x) = x^2 - t^2$

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(s,y)\,dyds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{1}{3}y^3 - yt^2 + C\right]_{x-t+s}^{x+t-s} ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{4}{3}s^3 - 2st^2 + \frac{2}{3}t^3 - 2sx^2 + 2tx^2\,ds \\ &= \frac{1}{2}t^2x^2. \end{aligned}$$

**2 Punkte**

Somit ist $u = v + w$ gegeben durch

$$u(t,x) = \frac{9}{4}e^{x-t} + \frac{5}{4}e^{x+t} + \frac{3}{4}e^{-x+t} - \frac{9}{4}e^{-x-t} + \frac{1}{2}t^2x^2.$$

**0.5 Punkte**

**Aufgabe 4.**

a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung im Sinne der Distributionen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

b) Geben Sie eine Differentialgleichung an, der $f$ im distributionellen Sinne genügt.

c) Sei $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Testfunktion. Welche der folgenden Ausdrücke definieren eine Distribution?

1) $T_1(\phi) = \left(\int_0^1 \phi(x)\,dx\right)^2$

2) $T_2(\phi) = \phi(0) + \phi'(1)$

3) $T_3(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\phi'(x)\,dx - \int_0^1 x\phi(x)\,dx$

Begründen Sie Ihre Antworten.

**2.5+1.5+3 Punkte**

**Lösung.**

a) Sei $T := T_f$, dann gilt

$$(T, \phi) = \int_0^{\infty} e^{-a|x|}\phi(x)\,dx$$

**0.5 Punkte**

und für die erste Ableitung

$$\begin{aligned}
(T', \phi) = -(T, \phi') &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{ax}\phi'(x)\,dx - \int_0^{\infty} e^{-ax}\phi'(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} ae^{ax}\phi(x)\,dx - [e^{ax}\phi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_0^{\infty} ae^{-ax}\phi(x)\,dx - \left[e^{-ax}\phi(x)\right]_0^{\infty} \\
&= -\phi(0) + \phi(0) - \int_{-\infty}^{\infty} a \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot e^{-a|x|}\phi(x)\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} a \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot e^{-a|x|}\phi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

**1 Punkt**

Die zweite Ableitung lässt sich ähnlich berechnen.

$$
\begin{aligned}
(T'', \phi) &= -(T', \phi') = -\int_{-\infty}^{\infty} a \cdot \mathsf{sgn}(x) \cdot e^{-a|x|} \phi'(x)\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} a \cdot \mathsf{sgn}(x) \cdot e^{-a|x|} \phi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} a \cdot \mathsf{sgn}(x) \cdot e^{-a|x|} \phi'(x)\, dx \\
&= +\int_{-\infty}^{0} a \cdot e^{ax} \phi'(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} a \cdot e^{-ax} \phi'(x)\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} a^2 \cdot e^{ax} \phi(x)\, dx - \int_{0}^{\infty} a^2 \cdot e^{-ax} \phi'(x)\, dx \\
&\quad + \left[a e^{ax} \phi(x)\right]_{-\infty}^{0} - \left[a e^{-ax} \phi(x)\right]_{0}^{\infty} \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} a^2 \cdot e^{-a|x|} \phi(x)\, dx + 2a\phi(0) \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(a^2 \cdot e^{-a|x|} - 2a\delta(x)\right) \phi(x)\, dx
\end{aligned}
$$

**1 Punkt**

b) Eine partielle Differentialgleichung, welche $f$ im distributionellen genügt ist zum Beispiel gegeben durch

$$f'(x) + a \cdot \mathsf{sgn}(x) \cdot f(x) = 0.$$

**1 Punkt**

Denn für eine Testfunktion $\phi$ und $f$ aus Teil a) gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x) + a\,\mathsf{sgn}(x) f(x)\phi(x)\, dx \\
=&\int_{-\infty}^{\infty} -a\,\mathsf{sgn}(x) e^{-a|x|}\phi(x) + a\,\mathsf{sgn}(x) e^{-a|x|}\phi(x)\, dx = 0.
\end{aligned}
$$

**0.5 Punkte**

c) 1) Eine Distribution ist eine lineare Abbildung $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Da $T_1(\phi)$ quadratisch in $\phi$ ist, wird durch $T_1(\phi)$ **keine Distribution definiert.**

**1 Punkt**

2) $T_2(\phi)$ **definiert eine Distribution**, da

$$(\delta - \delta_1', \phi) = (\delta, \phi) + (\delta_1, \phi') = \phi(0) + \phi'(1).$$

Hier ist mit $\delta_1$ die verschobene Deltadistribution gemeint und mit $\delta_1'$ die entsprechende Ableitung.

**1 Punkt**

3) $T_3(\phi)$ **definiert eine Distribution.** Sei $\chi_{[0,1]}$ die Indikatorfunktion für das Interval $[0, 1]$, dann gilt

$$
\begin{aligned}
(-2x - \chi_{[0,1]} x, \phi) &= -\int_{-\infty}^{\infty} 2x\phi(x)\, dx - \int_{0}^{1} x\phi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi(x)\, dx - \left[x^2\phi(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{0}^{1} x\phi(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \phi(x)\, dx - \int_{0}^{1} x\phi(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

**1 Punkt**

**Aufgabe 5.**
Gegeben ist das Konvektions–Diffusionsproblem: Gesucht ist $u \in C^2(0,1)$ mit

$$\begin{aligned} -u''(x) + 5u'(x) &= f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Problem soll mit Hilfe einer Finite Differenzen Methode auf einem regelmäßigen Gitter der Schrittweite $h$ und den Gitterpunkten $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ approximiert und in ein lineares Gleichungssystem der Form $A_h u_h = b_h$ überführt werden. Dazu sollen die Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} u'(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \\ u''(x_i) &\approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} \end{aligned}$$

benutzt werden.

(a) Bestimmen Sie $A_h$ und $b_h$.

(b) Geben Sie eine Bedingung an, unter der $A_h$ diagonaldominant ist.

(c) Geben Sie eine mögliche Finite Differenzen Diskretisierung für die gegebene Differentialgleichung an, so dass die resultierende Matrix $A_h$ strikt diagonal dominant ist.

**Hinweis:** Eine Matrix $A$ ist strikt diagonal dominant wenn

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

für mindestens ein $i = k$ und

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|, \quad \forall \quad i \neq k.$$

**2.5+2+2.5 Punkte**

**Lösung.**

(a) Sei $h = 1/n$ und $x_i = i \cdot h$ für $i = 0, \ldots, n$. Weiter sei $u_i = u(x_i)$. Dann gilt für $i = 2, \ldots, n-2$

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 5\frac{u_{i+1} - u_i}{h} &= f(ih) \\ \Rightarrow \quad \tfrac{1}{h^2}\left((-1 + 5h)u_{i+1} + (2 - 5h)u_i - u_{i-1}\right) &= f(ih). \end{aligned}$$

Da $u_0 = u(0) = 0$ und $u_n = u(1) = 0$, gilt für $i = 1$ bzw. $i = n-1$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{h^2}\left((-1 + 5h)u_2 + (2 - 5h)u_1\right) &= f(h) \\ \tfrac{1}{h^2}\left((2 - 5h)u_{n-1} - u_{n-2}\right) &= f((n-1)h). \end{aligned}$$

**1 Punkt**

Insgesamt erhalten wir das Gleichungssystem $A_h u_h = b$ mit

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2-5h & -1+5h & & & \\ -1 & 2-5h & -1+5h & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2-5h & -1+5h \\ & & & -1 & 2-5h \end{pmatrix},$$

**1,0 Punkte**

$$b_h = \begin{pmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ \vdots \\ f((n-2)h) \\ f((n-1)h) \end{pmatrix}, u_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

**0,5 Punkte**

(b) For diagonal dominance, we need the following conditions to hold true:

$$|2-5h| \geq |1-5h| \quad (1)$$
$$|2-5h| \geq 1 + |1-5h| \quad (2)$$
$$|2-5h| \geq 1 \quad (3)$$

**0.5 Punkte**

We can now solve the above three inequalities independently,

- Let $h \in (0, 1/5)$, then

$$2-5h \geq 1-5h \Rightarrow 2 \geq 1, \quad \text{which is always true} \quad (4)$$

Now let $h \in (1/5, 2/5)$, then

$$2-5h \geq 5h-1 \Rightarrow h \in (1/5, 3/10) \quad (5)$$

Now let $h \in (2/5, \infty)$, then

$$5h-2 \geq 5h-1 \Rightarrow -2 \geq -1, \quad \text{which is never true} \quad (6)$$

Thus for (**??**), we have

$$h \in (0, 3/10) \quad (7)$$

**0.5 Punkte**

- Let $h \in (0, 1/5)$, then

$$2-5h \geq 2-5h \Rightarrow h \in (0, 1/5) \quad (8)$$

Let $h \in (1/5, 2/5)$, then

$$2-5h \geq 5h \Rightarrow h \in (0, 1/5), \quad \text{which does not belong to the desired range} \quad (9)$$

Let $h \in (2/5, \infty)$, then

$$5h-2 \geq 5h, \quad \text{which could never be true.} \quad (10)$$

Thus for (**??**), we obtain $h \in (0, 1/5)$.

**0.5 Punkte**

- Doing the same as above for (**??**), we obtain

$$h \in (0, 1/5) \cup (3/5, \infty) \quad (11)$$

**0.5 Punkte**

The final result is the intersection of the results obtained for (**??**)-(**??**), thus we finally have

$$h \in (0, 1/5) \tag{12}$$

**0.5 Punkte**

(c) Wird für die Approximation von $u'(x_i)$ anstatt der Downwind-Diskretisierung, die Upwind-Diskretisierung

$$u'(x_i) \approx \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}$$

benutzt, so erhalten wir die Matrix

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2+5h & -1 & & & \\ -1-5h & 2+5h & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1-5h & 2+5h & -1 \\ & & & -1-5h & 2+5h \end{pmatrix}.$$

**1 Punkt**

Mit dieser Diskretisierung ist $A_h$ eine schwach diagonaldominante Matrix, da

$$\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \leq 2 + 5h = a_{i,i} \text{ für } i = 1..n-1$$

For strict diagonal dominance, we have the following for the first row of the matrix

$$\sum_{j \neq 1} |a_{1j}| = 1 < 2 + 5h.$$

**1,5 Punkte**

**Aufgabe 6.**

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine s.p.d. Matrix und $D := \text{diag}(A)$. Zeigen Sie:

Es existiert ein $c_0 > 0$, so dass $2c_0D - A$ s.p.d (symmetric positive definite) ist.

(b) Wir betrachten das Richardson Verfahren für ein Gleichungssystem $Ax = b$:

$$x^{k+1} = x^k + \omega(b - Ax^k).$$

Gegeben sei die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Für welche Werte $\omega$ konvergiert die Methode?

(ii) Bestimmen Sie den optimalen Wert für $\omega$?

**3.5 + 3.5 Punkte**

**Lösung.**

(a) Wenn $A$ s.p.d. ist, sind die Diagonaleinträge von $A$ strikt positiv, denn würde es ein $A_{ii} \leq 0$ geben, so wäre $e_i^T A e_i = a_{ii}|e_i|^2 \leq 0$. Folglich ist auch $D = \text{diag}(A)$ s.p.d.

**1 Punkt**

$2c_0D - A$ ist symmetrisch. Es gilt für alle $v \neq 0$

$$0 < \min_i A_{ii} \leq \frac{v^TDv}{v^Tv} \leq \max_i A_{ii}$$

**0,5 Punkte**

und

$$0 < \lambda_{\text{min}}(A) \leq \frac{v^TAv}{v^Tv} \leq \lambda_{\text{max}}(A).$$

**0,5 Punkte**

Somit ist

$$\frac{1}{v^Tv}v^T(2c_0D - A)v = 2c_0\frac{v^TDv}{v^Tv} - \frac{v^TAv}{v^Tv} \geq 2c_0\min_i A_{ii} - \lambda_{\text{max}}(A).$$

Damit $2c_0D - A$ s.p.d. ist muss $2c_0\min_i A_{ii} - \lambda_{\text{max}} > 0$, d.h. $c_0 > \frac{\lambda_{\text{max}}}{2\min_i A_{ii}}$ sein.

**1,5 Punkte**

(b) (i) Die Iterationsmatrix der Methode ist $G_\omega = (I - \omega A)$.
The matrix $A$ is upper triangular therefore its eigenvalues are the entries on the diagonal. Thus we have the following eigenvalues for $A$.

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3 \tag{13}$$

**1,0 Punkte**

For convergence, we need the spectral radius of the iteration matrix to be less than one. This provides us with the following condition

$$|1 - \omega\lambda_i| < 1 \tag{14}$$

which gives the following $\omega \in (0, \frac{2}{3})$

**1 Punkt**

(ii) The spectral radius is given by

$$\rho(G_\omega) = \max\{|1 - \omega\lambda_i|\}.$$

For the optimal $\omega$, we would like to minimize the above spectral radius. For different eigenvalues of $A$, we have the following

$$|1 - 2\omega| = \begin{cases} 1 - 2\omega & 0 < \omega \leq \frac{1}{2} \\ -1 + 2\omega & \frac{1}{2} < \omega < \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$|1 - \omega| = 1 - \omega$$

$$|1 - 3\omega| = \begin{cases} 1 - 3\omega & 0 < \omega \leq \frac{1}{3} \\ -1 + 3\omega & \frac{1}{3} < \omega < \frac{2}{3} \end{cases}$$

**0,5 Punkte**

So the $\omega$ which minimises the spectral radius is given by the following expression

$$3\omega - 1 = 1 - \omega, \Rightarrow \omega = 0.5 \tag{15}$$

**1 Punkt**

**Alternate Solution for Optimal Damping Factor**. Another way to do this is by using the following formulae

$$\omega_{opt} = \frac{2}{|\lambda_{min}(A)| + |\lambda_{max}(A)|} = 0.5 \tag{16}$$

**1.5 Punkte**

**Aufgabe 7.**

Bestimmen Sie zu den Daten

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_k$ | 0 | $\frac{1}{2}\pi$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $f(x_k)$ | 3 | 1 | 2 | 3 |

ein trigonometrisches Polynom der Form

$$T_4(f; x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_j(f) e^{ijx}$$

das die Daten interpoliert, also die Bedingung

$$T_4(f; x_k) = f(x_k), \text{ für } k = 0, .., 3$$

erfüllt.

**5 Punkte**

**Lösung.**

Die 4. Einheitswurzel hat die Form:

$$\epsilon = e^{-\frac{1}{2}i\pi} = -i$$

Die Koeffizienten $d_j(f)$ sind wie folgt definiert:

$$d_j(f) = \frac{1}{4} \sum_{l=0}^{3} f\left(\frac{l}{2}\pi\right) \epsilon^{jl}$$

**1,5 Punkte**

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
d_0(f) &= \frac{1}{4}\left[3\epsilon^0 + 1\epsilon^0 + 2\epsilon^0 + 3\epsilon^0\right] \\
&= \frac{1}{4}[3+1+2+3] = \frac{9}{4}, \\
d_1(f) &= \frac{1}{4}\left[3\epsilon^0 + 1\epsilon^1 + 2\epsilon^2 + 3\epsilon^3\right] \\
&= \frac{1}{4}[3-i-2+3i] = \frac{1+2i}{4}, \\
d_2(f) &= \frac{1}{4}\left[3\epsilon^0 + 1\epsilon^2 + 2\epsilon^4 + 3\epsilon^6\right] \\
&= \frac{1}{4}[3-1+2-3] = \frac{1}{4}, \\
d_3(f) &= \frac{1}{4}\left[3 + 1\epsilon^3 + 2\epsilon^6 + 3\epsilon^9\right] \\
&= \frac{1}{4}[3+1i-2-3i] = \frac{1-2i}{4}.
\end{aligned}$$

**1,5 Punkte**

Das trigonometrische Polynom hat also die Form:

$$\begin{aligned}
T_4(f;x) &= \sum_{j=0}^{3} d_j(f) e^{ijx} \\
&= \frac{9}{4} + \frac{1+2i}{4} e^{ix} + \frac{1}{4} e^{2ix} + \frac{1-2i}{4} i e^{3ix}.
\end{aligned}$$

**2,0 Punkte**

**Aufgabe 8.**
Betrachten Sie das Randwert-Problem

$$-u''(x) + u(x) = g(x) \quad x \in (0,1)$$
$$u'(0) = u'(1) = 0$$

a) Finden Sie die Eigenfunktionen des Differentialoperators

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}.$$

b) Sei $g(x)$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Nutzen Sie die folgende Darstellung für $u$, gegeben durch

$$u = \sqrt{2} \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cos(i\pi x)$$

um eine Lösung des Randwert-Problems zu finden.

**Hinweis:** $\int_0^1 \cos(n\pi x)\cos(m\pi x)dx = \frac{1}{2}\delta_{nm}$ mit dem Kronecker Delta $\delta_{nm}$.

**3 + 3 Punkte**

**Lösung.**

a) The eigenvalue problem of the differential operator is given as

$$\psi = -\lambda^2\psi, \quad \psi^{'}(0) = \psi^{'}(1) = 0 \tag{17}$$

Making the following ansatz for $\psi$

$$\psi = C\exp(mx) \tag{18}$$

we obtain the following

$$m^2 = -\lambda^2, \Rightarrow m = \pm\sqrt{-\lambda^2}$$

We can now have the following three situations for $\lambda$, and corresponding to each to them we will get a different eigenfunction

- If $\lambda = 0$, then $\psi = Ax + B$

**1 Punkt**

- If $\lambda \in \mathbb{R}$, then $\psi = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$

**1 Punkt**

- If $\lambda = i\omega$ ($i^2 = -1$), then $\psi = Aexp(\omega x) + Bexp(-\omega x)$

**1 Punkt**

**Note:** The boundary conditions have not been given the problem but that makes the question a bit ambiguous. In case a student computes the eigenfunctions such that he uses the boundary conditions from the problem itself then the following grading scheme has been adopted: $(0.5, 0.5, 0.5)$ points for the above three conditions for $\lambda$. And $(0.5, 0.5, 0.5)$ for the consideration for boundary conditions. The solution, if one uses the boundary conditions from the problem, is the following

- For $\lambda = 0$, we obtain $A = 0 \Rightarrow \psi = B$

- For $\lambda \in \mathbb{R}$, we obtain $B = 0$ and $\lambda = n\pi$
- For $\lambda = i\omega$, we obtain $A = B = 0$.

b) Let $\psi_n$ be given as

$$\psi_n(x) = \sqrt{2}\cos(n\pi x) \tag{19}$$

then we have the following ansatz for $u$ (from the question itself)

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n \tag{20}$$

Similarly, we project $g(x)$ using $\psi_n$ in the following way.

$$\begin{aligned}\int_0^1 g\psi_n dx =& \sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x)dx - \sqrt{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(n\pi x)dx && (21)\\ =& \sqrt{2}\left[\frac{1}{n\pi}\sin(\frac{1}{2}n\pi) + \frac{1}{n\pi}\sin(\frac{1}{2}n\pi)\right] && (22)\\ =& \frac{2\sqrt{2}}{n\pi}\sin(\frac{1}{2}n\pi) = \gamma_n && (23)\end{aligned}$$

**1,0 Punkte**

Thus, $g(x)$ can be written as

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n \tag{24}$$

Using the eigenvalue problem, we know that

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n^{''} = -\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n (n\pi)^2 \psi_n \tag{25}$$

Substituting the ansatz into the differential equation, and using the expansion for $g$, we obtain the following

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n (n\pi)^2 \psi_n + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \psi_n = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_n \psi_n \tag{26}$$

**1,0 Punkte**

Since the eigenfunctions are orthonormal, the above relation implies

$$\alpha_n = \frac{\gamma_n}{(n\pi)^2 + 1} \tag{27}$$

**1,0 Punkte**