
Klausur Analysis für Informatiker

13.02.2014

Aufgabe 1.

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} (k-1)(k+1) = 2n^2 - n - 1$$

gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.

4 Punkte

Aufgabe 2.

Untersuchen Sie die angegebenen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

(b) $a_n = \frac{2n(n+4)}{n+1} - \frac{4n^3}{2n^2-1}$

(c) $a_n = \left(\frac{q}{q+1}\right)^n \frac{n^3+4}{3+3n^3}$ für $q > 0$.

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7k-2}{8k-3\sqrt{k}}\right)^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+3}{2^{k+1}k}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+k^2}$

1,5+1,5+1,5 Punkte

Aufgabe 4.

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{\cos x + 3x - 1}{2x}.$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich D der Funktion f an und untersuchen Sie f auf stetige Fortsetzbarkeit in den Definitionslücken.

3 Punkte

Aufgabe 5.

Es sei $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sqrt{x} \log(x-1).$$

- (a) Ist f differenzierbar auf dem Intervall $(2, 4)$?
- (b) Untersuchen Sie f auf Monotonie beziehungsweise strenge Monotonie.
- (c) Bestimmen Sie die globalen Extremstellen von f .

-
- (d) Geben Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung $T_2(x)$ von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ an.

1+1+1+2 Punkte

Aufgabe 6.

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_{-1}^1 \frac{16x - 16}{x^2 - 4} dx$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$ (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3(x)}{1 - \sin(x)} dx.$

Entscheiden Sie jeweils zuerst, ob es sich um ein bestimmtes oder ein uneigentliches Integral handelt.

2+2+2 Punkte

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x, y, z) = x^3 + e^y \sin z$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, \log 3, \frac{\pi}{2})$ in Richtung des Vektors $r = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$

3 Punkte

Aufgabe 8.

Begründen Sie, warum die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + e^z \\ x^2 \sin y + z \end{pmatrix}$$

auf ganz \mathbb{R}^3 total differenzierbar ist und geben Sie die totale Ableitung im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, \frac{\pi}{2}, 0)$ an.

3 Punkte

Aufgabe 9.

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x = \frac{1}{4} e^{1 - \frac{x}{2}}$$

genau eine Lösung im Intervall $[0, 1]$ besitzt.

6 Punkte