

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

2

Aufgabe 1. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2.$$

3 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

3

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

4

Aufgabe 2. Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie Betrag und Argument von z .

(a) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5$

(b) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{18}$

(a) 3 Punkte; (b) 4 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

5

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

6

Aufgabe 3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$

(a) 4 Punkte; (b) 3 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

7

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

8

Aufgabe 4. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(2n^3 + 1)}}$$

(b)
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}$$

Bestimmen Sie bei (b) zusätzlich den Wert der Reihe, falls er existiert.

(a) 3 Punkte; (b) 5 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

9

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

10

Aufgabe 5. Für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

11

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

12

Aufgabe 6. Gegeben sei eine Funktionenfolge $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$f_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

1. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ in $[-1, 1]$ auf Stetigkeit.
2. Konvergiert f_n gleichmäßig auf $[-1, 1]$ gegen f ?

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

13

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

14

Aufgabe 7. Bestimmen Sie folgendes unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x + 1}{x^4 + 3x^2 - 4} dx.$$

7 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

15

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

16

Aufgabe 8. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx .$$

Tipp: Substituieren Sie $x = 2 \sin y$.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

17

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

18

Aufgabe 9. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ wird mit einem relativen Fehler von maximal 5 % gemessen. Was können Sie über den relativen Fehler von

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x+1) + x}$$

sagen? Liegt dieser ebenfalls unter 5 % ?

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

19

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

20

Aufgabe 10. Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2
x_i	0	1	2
f_i	1	2	0

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in der Lagrangeschen Basis, in der Newtonschen Basis und in der Monomialen Basis.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

21

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

22

Aufgabe 11. Gegeben sei eine Funktion f in $C^2([a, b])$. Geben Sie allgemein eine obere Schranke für den Interpolationsfehler

$$f - P(f|a, b)$$

in der L_∞ -Norm auf $[a, b]$ an.

Geben Sie einen konkreten Wert für eine gute obere Schranke für $f = \cos(2x)$, $a = 0$, und $b = 0.1$ an.

6 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

23

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

24

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

25

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

26

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

27

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

28