Bestimmen sie c_0, c_1, c_2 und x_0 so, dass der Genauigkeitsgrad möglichst groß ist. Geben Sie nach Ihrer Bestimmung von c_0, c_1, c_2 und x_0 den maximalen Genauigkeitsgrad an.

b) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$. Schätzen Sie den maximalen Fehler ab, der entsteht, wenn das Integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

mit einer Quadraturformel vom Genauigkeitsgrad 3 approximiert wird.

Aufgabe 1.

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \mathrm{e}^x + \sin(y).$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades $T_2(f)$ von f an der Stelle $(0, 0)$.

4,5 Punkte

Aufgabe 2.
Sei

$$I = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \cos(\pi x)\, dx.$$

(a) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der Mittelpunktsregel.

(b) Berechnen Sie eine Nährung von I mit Hilfe der summierten Trapezregel, wobei Sie das Intervall $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

 (i) in drei äquidistante Teilintervalle zerlegen,

 (ii) in vier äquidistante Teilintervalle zerlegen.

Hinweis: Es gilt

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

1 + 4 Punkte

Aufgabe 3.

Sei $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\phi(x, y) = x^2 + \frac{1}{4}y - 2xy + y^3.$$

Bestimmen Sie alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion ϕ und stellen Sie jeweils fest ob es sich um ein Maximum, Minimum oder Sattelpunkt handelt.

6,5 Punkte

Aufgabe 4.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie eine LR-Zerlegung von A an, wobei L eine unipotente untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Berechnen Sie die Kondition der Matrix A bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$- und $\|\cdot\|_1$-Norm.

3 + 5,5 Punkte

Aufgabe 5.

a) Bestimmen Sie die relative Kondition κ_{rel} der Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = xe^{x^2}.$$

b) Was können Sie über den relativen Fehler der Funktion

$$g(x) = \frac{3}{2x + \ln(x+1)}$$

auf dem Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}, x > e^3$ sagen, wenn die Zahl x einen relativen Fehler von maximal 1 Prozent bei ihrer Erhebung aufweist. Liegt dieser ebenfalls unter 1 Prozent?

1 + 3 Punkte

Aufgabe 6.

a) Sei $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}$, $n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sei mit Hilfe der Definition, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{gleichmäßig auf} \quad [0, \infty).$$

b) Geben Sie ein Beispiel einer konvergenten Funktionenfolge $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ an, mit

- f_n stetig auf $[0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- $f_n(x) \xrightarrow{\text{pktw.}} f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ **und**
- f *nicht* stetig auf $[0, 1]$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

2 + 2 Punkte

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie die Lösung folgender Anfangswertprobleme:

a) $y' = yx^3, \quad y(0) = 1$

b) $y'' - y = \sin(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2}$

5 + 7,5 Punkte

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{5}\left(\sin(x) + x^3\right) + \frac{1}{10}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f die Vorraussetzungen für den Banachschen Fixpunktsatz erfüllt.

(b) Angenommen der Fixpunkt x^* von f in $[-1, 1]$ soll nun per Fixpunktiteration vom Startwert $x_0 = 0$ aus berechnet werden und f sei lipschitzstetig mit einer Lipschitzkonstante $L = \frac{4}{5}$. Geben Sie eine Abschätzung für die Anzahl der Schritte an, die erforderlich sind um x^* bis auf einen vorgegebenen Fehler von $\epsilon > 0$ zu bestimmen.

4,5+ 3 Punkte

Aufgabe 9.
Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 6 & 21 & 0 \\ -2 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 30 \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Lösen Sie unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung das Gleichungssystem $Ax = b$.

b) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 10.

Es seien $f(x,y) = x + y$ und die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ gegeben.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatormethode alle Kandidaten für Extremalstellen der Funktion f unter der Nebenbedingung $(x,y) \in M$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a)

$$\min_{(x,y)\in M} f(x,y).$$

5 + 1,5 Punkte

Aufgabe 11.

a) Die Daten

x_i	-1	0	1	2	4
y_i	-2.8	0.2	1.0	0.0	-7.7

sollen mit Hilfe des Ansatzes

$$y(x) = ax + bx^2$$

im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate möglichst gut approximiert werden. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Ausgleichsproblem und geben Sie die zugehörige Normalengleichung an (nicht lösen!).

b) Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ein $x^* \in \mathbb{R}^2$, das $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ minimiert.

4 + 3 Punkte

Aufgabe 12.

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(\frac{x}{y}), & \text{für} \quad y \neq 0, \\ 0, & \text{für} \quad y = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass diese Funktion an jeder Stelle $(x_0, 0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, stetig ist.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen Sie, dass f keine stetige Erweiterung auf $\mathbb{R}^2$ besitzt.

2,5 + 3 Punkte

Aufgabe 13.

Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	0	2	3	4
f_i	0	2	6	7

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ unter Verwendung der Newtonschen Interpolationsformel. Geben Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ in der Newton Basis an.

b) Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(-1)$ mit dem Neville-Aitken-Schema.

4,5+ 3,5 Punkte

Aufgabe 14.

Anstatt des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ werde das gestörte lineare Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$ gelöst. Dabei sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Abschätzung des relativen Fehlers

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

in der Maximumnorm an, ohne die Lösung explizit zu berechnen.

5 Punkte