

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

2

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \cos(ty)$$

lokal um $(t_0, y_0) = (0, 1)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

2.5 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

3

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

4

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\exp(xy) + y^2 \sin(z) = 1$$

in der Nähe von $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ eindeutig nach $z(x, y)$ aufgelöst werden kann, und bestimmen Sie die Ableitungen

$$\partial_x z(0, 1) \quad \text{und} \quad \partial_y z(0, 1).$$

3.5 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

5

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

6

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

7

Aufgabe 3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2 + 2x - 4y - 5).$$

- (a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f um den Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (1, -2)$.
- (b) Hat f in (x_0, y_0) ein lokales Extremum? Falls ja, handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum?

2+2 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

8

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

9

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

10

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi}{4}y\right)$.

Bestimmen Sie das Maximum von f unter der Nebenbedingung

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

4 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

11

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

12

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

13

Aufgabe 5. (a) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die die konjugiert komplexen Eigenwerte $\lambda_{1,2} = a \pm bi$ besitzt.

Zeigen Sie: Ist v_1 ein Eigenvektor von A zu λ_1 , so ist $\overline{v_1}$ ein Eigenvektor von A zu λ_2 .

(b) Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/6 \\ 0 & -1/2 & -1/6 \\ 0 & 6 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte über den komplexen Zahlen \mathbb{C} und geben Sie den entsprechenden Eigenraum zu jedem Eigenwert an.

(c) Ist die Matrix A diagonalisierbar?

1+3+1 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

14

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

15

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

16

Aufgabe 6. Gegeben sei folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -9 \\ -x_1 + 3x_2 &= 2. \end{aligned}$$

- (a) Schreiben Sie das Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ und berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$.
- (b) Berechnen Sie die Determinante von A .
- (c) Lösen sie $Ax = b$ mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.
- (d) Skizzieren Sie ein Programm zum Lösen der Gleichung $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$ mittels der QR-Zerlegung. Schätzen Sie den Aufwand für jeden Schritt ab.

1.5+0.5+1+1 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

17

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

18

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

19

Aufgabe 7. Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter α und β sollen so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

i	1	2	3	4
t_i	1	2	3	4
$f(t_i)$	1	2	2	3

möglichst gut approximiert wird.

- Formulieren Sie das entsprechende Ausgleichsproblem.
- Stellen Sie die Normalgleichung auf und lösen Sie sie mit dem Cholesky-Verfahren.
- Skizzieren Sie die Lösung inklusive der Messwerte.

1+3+1 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

20

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

21

Aufgabe 8. Es soll eine Näherungslösung für die Gleichung $x + \ln(x) = 0$ ermittelt werden.

- (a) Überprüfen Sie die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für beide Verfahren

$$x_{n+1} := e^{-x_n} \quad \text{oder} \quad y_{n+1} := \frac{1}{2}(y_n + e^{-y_n})$$

auf dem Intervall $I = [0, 1]$.

- (b) Es soll nun das Verfahren aus (a) gewählt werden, welches die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt: Als Startwert wird $x_0 = 0.5$ gewählt. Schätzen Sie ab, wieviele Iterationsschritte k mindestens notwendig sind, um eine Genauigkeit von $\varepsilon > 0$ zu erreichen.
- (c) Angenommen wir wüssten, dass sich die exakte Lösung im Intervall $J = [1/100, 1]$ befindet. Welches der beiden Verfahren aus (a) würden Sie dann zur Lösung der Gleichung verwenden?

2.5+1.5+1 Punkte

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

23

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

24

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

25

Name: _____

Matr.-Nr.: _____

26