Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Lehrstuhl A für Mathematik

Zur Struktur shiftinvarianter Operatoren auf Folgenräumen über $\mathbb{Z}^n$

Diplomarbeit

Hanna Schäfer

Betreuer: Prof. Dr. Hartmut Führ

September 2009

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angeführten Hilfsmittel und Quellen angefertigt habe.

Hanna Schäfer

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Wird mit $S(\mathbb{R}^n)$ der Raum der Schwartzfunktionen und mit $S'(\mathbb{R}^n)$ der Raum der temperierten Distributionen bezeichnet, so besitzt ein linearer, stetiger und $\mathbb{Z}^n$-shiftinvarianter Operator $A : S(\mathbb{R}^n) \to S'(\mathbb{R}^n)$ nach [5, Theorem 1.1] die Darstellung

$$\widehat{A\varphi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} w_k \cdot (T_k \widehat{\varphi}), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

wobei die Funktionale $w_k \in S'(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{Z}^n$, durch A eindeutig festgelegt sind.

Ein Ziel dieser Arbeit ist es, dieses Resultat auf Operatoren auf Folgenräumen zu übertragen, die auf einer Untergruppe $\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ von endlichem Index in $\mathbb{Z}^n$ invariant sind.

Eine andere Vorgehensweise zur Bestimmung einer Darstellung einer linearen, stetigen und Γ-invarianten Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ auf der Fourierseite orientiert sich an [1]. Mit Hilfe von Modulationsvektoren wird in [1] eine matrixwertige Fouriertransformation betrachtet, so dass die lineare, stetige und $M\mathbb{Z}$-invariante Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ eine Darstellung

$$\left(\widehat{Af}\right)_M(x) = \widehat{A}_M(x) \cdot \widehat{f}_M(x), \quad f \in l^2(\mathbb{Z}), \tag{2}$$

für gewisse x besitzt. Dabei handelt es sich bei $\left(\widehat{Af}\right)_M(x)$ und $\widehat{f}_M(x)$ um Modulationsvektoren der Größe M. Die Matrix $\widehat{A}_M(x)$ wird als Matrixdarstellung der Fouriertransformierten der Abbildung A aufgefasst.

In dieser Arbeit wird dieses Resultat auf den allgemeineren Fall einer linearen, stetigen und Γ-invarianten Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ übertragen, wobei Γ eine beliebige Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ von endlichem Index in $\mathbb{Z}^n$ ist. Ziel ist es also, die Darstellung

$$\left(\widehat{Af}\right)_\Gamma(x) = \widehat{A}_\Gamma(x) \cdot \widehat{f}_\Gamma(x), \quad f \in l^2(\mathbb{Z}^n), \tag{3}$$

für gewisse x herzuleiten.

Im wesentlichen handelt es sich bei der Darstellung in (3) um eine Verallgemeinerung des Faltungssatzes. Der Faltungsoperator ist $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant und der Faltungssatz besagt, dass die Faltung unter der Fouriertransformation in ein Produkt übergeht. Nichts anderes besagt (3) für den allgemeinen Fall Γ-invarianter Operatoren.

Mit Hilfe einer weiteren Darstellung für eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung A, kann der Zusammenhang zwischen den beiden oben angesprochenen Darstellungen gezeigt werden. Welche Darstellung sich als die Geeignetste herausstellt, richtet sich nach dem jeweiligen Anwendungsfall.

Nachfolgend wird die Vorgehensweise in groben Zügen erläutert.

Zu Beginn wird der Raum der Schwartzfolgen $S(\mathbb{Z}^n)$ definiert, um in den folgenden Kapiteln möglichst allgemeine lineare, stetige und Γ-invariante Operatoren von $S(\mathbb{Z}^n)$ in den Dualraum $S'(\mathbb{Z}^n)$ betrachten zu können. Dann werden die Dualräume der Schwartzfolgen und der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf dem n-dimensionalen Torus untersucht.

Anschließend werden die Fouriertransformationen auf $l^1(\mathbb{Z}^n), l^2(\mathbb{Z}^n), L^1(\mathbb{T}^n), L^2(\mathbb{T}^n)$, dem Raum der Schwartzfolgen, dem Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf dem n-dimensionalen Torus und den zugehörigen Dualräumen definiert. Dabei wird dem Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf dem n-dimensionalen Torus Beachtung geschenkt, da es sich bei ihm um das Bild der Fouriertransformation auf dem Raum der Schwartzfolgen handelt. Ebenso wird in diesem Kapitel die Poissonsche Summenformel bewiesen. Sie wird für mehrere Beweise in dieser Arbeit benötigt.

Der Satz vom Kern spielt im Beweis der Darstellung in (1) eine zentrale Rolle. Da bei dem Beweis einer analogen Aussage für Operatoren auf $S(\mathbb{Z}^n)$ ähnlich vorgegangen werden soll, wird der Satz vom Kern auf dem Raum der Schwartzfolgen bewiesen.

Nach dieser Vorarbeit werden erste Eigenschaften Γ-invarianter Abbildungen betrachtet. Anschließend kann dann im Kapitel über die Darstellung Γ-invarianter Abbildungen eine zu (1) analoge Aussage für lineare, stetige und Γ-invariante Operatoren auf $S(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen werden. Bevor die Verallgemeinerung von (2) betrachtet wird, wird eine weitere Darstellung für lineare, stetige und Γ-invariante Operatoren auf $S(\mathbb{Z}^n)$ mit Hilfe einer disjunkten Zerlegung von $\mathbb{Z}^n$ in Nebenklassen modulo Γ gezeigt. Im Anschluss werden die Zusammenhänge, die zwischen den verschiedenen Darstellungen bestehen, untersucht.

Das letzte Kapitel zeigt, dass die Darstellung mit Hilfe des Matrixkalküls wie in (3) ein wichtiges Hilfsmittel im Bereich der Bild- und Signalverarbeitung ist. Das Kapitel beinhaltet die Anwendung der gezeigten Resultate auf Kanaloperatoren und Filterbänke. Hier können Dank der bewiesenen Darstellungen Voraussetzungen an die Filter einer Filterbank angegeben werden, so dass diese perfekt rekonstruiert. Schließlich werden orthogonale Filterbänke betrachtet und gezeigt, dass unter gewissen Voraussetzungen an die Untergruppe Γ ein $l \in \mathbb{Z}^n$ existiert, so dass die Kommutatornorm $\| [K_i, T_l] \|_{\mathrm{op}}$ aller Kanäle K_i der Filterbank gleich Eins ist. Dabei ist die Kommutatornorm ein Maß für die Abweichung eines Operators von der $\mathbb{Z}^n$-Shiftinvarianz.

Die mit * gekennzeichneten Sätze, Korollare und Lemmata entstanden nach Beweisideen von Herrn Prof. Führ. Gleiches gilt für den mit * gekennzeichneten Abschnitt 5.1.1 über die Poissonsche Summenformel.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Führ für seine große Hilfsbereitschaft und seine noch größere Geduld bei der Betreuung dieser Arbeit bedanken.

Besonders danke ich Bianca Böhme, Ingo Hengstebeck und Andreas Mach für ihre Unterstützung in nahezu allen nicht-mathematischen Bereichen während der letzten Jahre. Ohne sie hätte ich es nicht geschafft.

2 Notationen und elementare Aussagen

In diesem Kapitel werden unter anderem die in dieser Arbeit verwendeten Notationen erklärt. Zudem beinhaltet es einen Abschnitt über die Verschiebungs- und Modulationsoperatoren auf $l^p(\mathbb{Z}^n)$. Schließlich werden einige elementare Aussagen bewiesen, auf welche häufig im weiteren Verlauf der Arbeit verwiesen wird.

2.1 Notationen

Seien X und Y topologische Vektorräume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *topologisch*, wenn f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Für Operatoren $S, T : X \to X$ wird $[T, S] := T \circ S - S \circ T$ definiert. Der Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ ist der Raum aller stetigen linearen Abbildungen von X nach Y; für $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ wird mit $\|A\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm von A bezeichnet.

Elemente von $\mathbb{C}^n$ seien Vektoren $u = (u_1, \dots, u_n)^T$. Für zwei Vektoren $u, v \in \mathbb{C}^n$ definiert wird das Skalarprodukt durch

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}^n} := u^T \overline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}$$

definiert und für $u \in \mathbb{C}^n$ bezeichnet

$$|u|^2 := \|u\|^2_{\mathbb{C}^n} := \langle u, u \rangle_{\mathbb{C}^n} = \sum_{j=1}^{n} |u_j|^2$$

die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$.

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = (A(i, j))_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wird mit einer linearen Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, v \mapsto A \cdot v$, identifiziert. Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, so bezeichnet man mit A^T die *transponierte Matrix* und mit $A^* = \overline{A}^T$ die *adjungierte Matrix*, wobei $\bar{\cdot}$ die komponentenweise komplexe Konjugation sei. Die Einheitsmatrix wird mit Id bezeichnet.

Eine Folge $f = (f(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ heißt *endlich*, falls $f(k) \neq 0$ nur für endlich viele $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Mit $F(\mathbb{Z}^n)$ wird dann der Raum aller endlichen Folgen bezeichnet. Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ der Raum aller Folgen über $\mathbb{Z}^n$, versehen mit der Initialtopologie bezüglich $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$, wobei $\varphi_k : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n} \to \mathbb{C}, f \mapsto f(k)$, für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ die Punktauswertung sei. Das heißt $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ wird mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen.

Für $1 \le p < \infty$ sei der Folgenraum $l^p(\mathbb{Z}^n)$ gegeben durch

$$l^p(\mathbb{Z}^n) := \left\{ f = (f(k))_{k \in \mathbb{Z}^n} \;;\; \|f\|^p_{l^p(\mathbb{Z}^n)} := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)|^p < \infty \right\}.$$

Der Raum $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ ist der Raum der beschränkten Folgen $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ mit der Supremumsnorm. Für $p = 2$ ist $l^2(\mathbb{Z}^n)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\overline{g(k)}, \quad f, g \in l^2(\mathbb{Z}^n),$$

ein Hilbertraum.

Eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ wird 2π-*periodisch* genannt, wenn

$$g(\xi_1 + 2\pi k_1, \xi_2 + 2\pi k_2, \ldots, \xi_n + 2\pi k_n) = g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

für alle $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)^T \in \mathbb{Z}^n$ und $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Die Menge $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ wird *eindimensionaler Torus* genannt; das kartesische Produkt $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \ldots \times \mathbb{T} \subset \mathbb{C}^n$ bezeichnet den *n-dimensionalen Torus*. Die Abbildung $\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}^n, (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T + 2\pi\mathbb{Z}^n \mapsto (e^{i\xi_1}, \ldots, e^{i\xi_n})^T$, ist ein bijektiver Homomorphismus, daher kann man eine Funktion $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$ mit einer 2π-periodischen Funktion identifizieren, vgl. [12, Chapter 9.3].

Die *Länge* eines *Multiindexes* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ist gegeben durch

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n.$$

Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so wird für die Abbildung $k \mapsto k^\alpha := \prod_{i=1}^n k_i^{\alpha_i}, k \in \mathbb{Z}^n$, die abkürzende Schreibweise k^α verwendet.

Für $m \in \mathbb{N}$ definiert man

$$\mathcal{C}^m(\mathbb{T}^n) := \{f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}\ ;\ \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq m \text{ gilt: } D^\alpha f \text{ existiert und ist stetig}\}$$

sowie

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^m(\mathbb{T}^n).$$

Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ und

$$|f|'_N := \sum_{|\alpha|\leq N} \sup_{\xi\in\mathbb{T}^n} |D^\alpha f(\xi)| = \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha f\|_\infty,$$

so wird $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ durch die Familie $(|\cdot|'_N)_{N\in\mathbb{N}}$ von Halbnormen topologisiert. Eine Folge $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ konvergiert in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gegen eine Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, wenn

$$|f_l - f|'_N \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Topologie durch abzählbar viele Normen erzeugt wird, ist der Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ metrisierbar.

Wird keine Aussage über das bei einer Integration verwendete Maß gemacht, so handelt es sich stets um das Lebesgue-Maß. Das *Integral* über den n-Torus wird definiert durch

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\,d\xi &= \int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}}\cdots\int\limits_{\mathbb{T}} f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n\\ &= \int\limits_{a_1}^{a_1+2\pi}\int\limits_{a_2}^{a_2+2\pi}\cdots\int\limits_{a_n}^{a_n+2\pi} f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n\\ &= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\cdots\int\limits_{0}^{2\pi} f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)\,d\xi_1 d\xi_2\ldots d\xi_n\\ &= \int\limits_{[0,2\pi)^n} f(\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

vgl. [12, Chapter 9.3].

Für $1 \leq p < \infty$ wird der Raum

$$L^p(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}) := L^p(\mathbb{T}^n) := \left\{ f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C} \text{ messbar} \,;\, \|f\|^p_{L^p(\mathbb{T}^n)} := (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{T}^n}|f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

definiert. Bezeichnet μ das Lebesgue-Maß, so entält der Raum $L^\infty(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}) = L^\infty(\mathbb{T}^n)$ alle messbaren Funktionen $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$, für die

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{T}^n}|f(x)| := \inf\{M > 0 \,;\, \mu(\{x \in \mathbb{T}^n \,;\, |f(x)| > M\}) = 0\} < \infty$$

gilt. Funktionen aus dem Raum $L^p(\mathbb{T}^n)$,$1 \leq p \leq \infty$, die fast überall übereinstimmen, werden identifiziert, vgl. [12, Chapter 9.3]. Wegen $\mu(\mathbb{T}^n) = (2\pi)^n$ gilt für $1 \leq q \leq p \leq \infty$ und alle $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ die Ungleichung

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p$$

und damit die Inklusion $L^p(\mathbb{T}^n) \subset L^q(\mathbb{T}^n)$, vgl. [4, Kapitel VI, Satz 2.10]. Für $p = 2$ ist $L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} := (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x)\overline{g(x)}dx, \quad f,g \in L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C}),$$

ein Hilbertraum.

2.2 Operatoren auf $l^p(\mathbb{Z}^n)$

(2.1) Bemerkung
Für jedes $l \in \mathbb{Z}^n$ wird durch

$$\delta_l(k) := \begin{cases} 1, & \text{falls } k = l,\\ 0, & \text{falls } k \neq l,\end{cases}$$

eine Folge $\delta_l \in l^p(\mathbb{Z}^n)$ definiert. Bei $(\delta_l)_{l\in\mathbb{Z}^n} \subset l^2(\mathbb{Z}^n)$ handelt es sich um eine Orthonormalbasis von $l^2(\mathbb{Z}^n)$. Somit gilt $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k$ mit unbedingter Konvergenz in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ für jedes $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$. Der Raum $F(\mathbb{Z}^n)$ besteht aus allen endlichen Linearkombinationen der $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ und ist dicht im Folgenraum $l^2(\mathbb{Z}^n)$ enthalten.

(2.2) Definition (Verschiebungsoperator auf $l^p(\mathbb{Z}^n)$)
Für $l \in \mathbb{Z}^n$ wird der *Verschiebungsoperator* T_l auf $l^p(\mathbb{Z}^n)$ durch

$$(T_l f)(k) := f(k-l)$$

definiert. Er ist offensichtlich wohldefiniert.

(2.3) Lemma
Ist $l \in \mathbb{Z}^n$ beliebig, so ist der Verschiebungsoperator $T_l : l^p(\mathbb{Z}^n) \to l^p(\mathbb{Z}^n)$ linear und isometrisch, also insbesondere stetig.

Beweis
Die Abbildung T_l ist linear. Sei $f \in l^p(\mathbb{Z}^n)$, dann folgt

$$\begin{aligned}\|T_l f\|^p_{l^p(\mathbb{Z}^n)} &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |(T_l f)(m)|^p = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |f(m-l)|^p \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p = \|f\|^p_{l^p(\mathbb{Z}^n)},\end{aligned}$$

also ist die Abbildung T_l isometrisch und damit stetig. □

(2.4) Definition (Modulationsoperator auf $l^p(\mathbb{Z}^n)$)
Für $\xi \in \mathbb{T}^n$ wird der *Modulationsoperator* M_ξ auf $l^p(\mathbb{Z}^n)$ durch

$$\left(M_\xi f\right)(k) := e^{i\langle \xi,k\rangle} \cdot f(k)$$

definiert. Er ist offensichtlich wohldefiniert.

(2.5) Lemma
Ist $\xi \in \mathbb{T}^n$ beliebig, so ist der Modulationsoperator $M_\xi : l^p(\mathbb{Z}^n) \to l^p(\mathbb{Z}^n)$ linear und isometrisch, also insbesondere stetig.

Beweis
Die Abbildung M_ξ ist linear. Sei $f \in l^p(\mathbb{Z}^n)$, dann folgt

$$\begin{aligned}\|M_\xi f\|^p_{l^p(\mathbb{Z}^n)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |\left(M_\xi f\right)(k)|^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |e^{-i\langle \xi,k\rangle} f(k)|^p \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p = \|f\|^p_{l^p(\mathbb{Z}^n)},\end{aligned}$$

also ist die Abbildung M_ξ isometrisch und damit stetig. □

(2.6) Definition und Bemerkung (Faltung auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$)
Für $f, g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ wird die *Faltung* $f * g$ von f mit g durch

$$(f * g)(l) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, g(l-k)$$

definiert. Aufgrund der Hölder-Ungleichung konvergiert diese Reihe absolut und es gilt $f * g \in l^\infty(\mathbb{Z}^n)$. Für festes $g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ wird der Operator

$$C_g : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^\infty(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f * g = g * f,$$

der *durch g induzierte Faltungsoperator* genannt; die Gleichheit $f * g = g * f$ gilt aufgrund der absoluten Konvergenz.

2.3 Elementare Aussagen

Um in den folgenden Kapiteln Aussagen über die Konvergenz von Folgen und Reihen treffen zu können, sind einige Abschätzungen unerlässlich. Sie werden in diesem Abschnitt bewiesen. Darüber hinaus erklärt Lemma 2.9, wie die Normierungen bei den Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{T}^n), L^2(\mathbb{T}^n)$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ zustande kommen.

(2.7) Lemma
a) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existieren Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\alpha(1+|k|^2)^{\frac{N}{2}} \leq |k|^N \leq (1+|k|)^N \leq \beta(1+|k|^2)^{\frac{N}{2}}.$$

b) Für jedes $N \in \mathbb{N}$ existieren Konstanten $\gamma, \delta > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\gamma|k|^N \leq \sum_{|\alpha| \leq N} |k^\alpha| \leq \delta |k|^N, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Beweis
a) Es gilt $|k|^2 \geq 1$ genau dann, wenn $2|k|^2 \geq 1 + |k|^2$ erfüllt ist, also gilt

$$\alpha(1+|k|^2)^{N/2} \leq |k|^N$$

mit $\alpha = 2^{-N/2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Offensichtlich gilt $|k|^N \leq (1+|k|)^N$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$.

Schließlich muss noch die Ungleichung auf der rechten Seite gezeigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}(1+|k|)^2 &\leq (1+|k|)^2 + (1-|k|)^2 = 1 + 2|k| + |k|^2 + 1 - 2|k| + |k|^2 \\ &= 2 + 2|k|^2 = 2(1+|k|^2)\end{aligned}$$

und somit folgt $(1+|k|)^N \leq \beta(1+|k|^2)^{N/2}$ mit $\beta = 2^{N/2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$.

b) Zuerst wird die Abschätzung auf der rechten Seite bewiesen. Es gilt

$$|k^\alpha| = \left|\prod_{i=1}^n k_i^{\alpha_i}\right| = \prod_{i=1}^n |k_i|^{\alpha_i} \le \max_{1\le i\le n} |k_i|^{|\alpha|} \le \left(\sum_{i=1}^n |k_i|^2\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} = |k|^{|\alpha|}$$

und damit folgt

$$\sum_{|\alpha|\le N} |k^\alpha| \le \sum_{|\alpha|\le N} |k|^{|\alpha|} \le \sum_{|\alpha|\le N} |k|^N = \delta |k|^N$$

für eine Konstante $\delta > 0$ und alle $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$.

Nun wird die linke Abschätzung gezeigt. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\begin{aligned} |k|^N = \left(\sum_{i=1}^n |k_i|^2\right)^{\frac{N}{2}} &\overset{(*)}{\le} C'\left(\sum_{i=1}^n |k_i|\right)^N = C' \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\prod_{j=1}^n \alpha_j!} \prod_{i=1}^n |k_i|^{\alpha_i} \\ &\le C_N \sum_{|\alpha|=N} \prod_{i=1}^n |k_i|^{\alpha_i} = C_N \sum_{|\alpha|=N} |k^\alpha| \le C_N \sum_{|\alpha|\le N} |k^\alpha| \end{aligned}$$

mit $C_N := C' \max\{\frac{N!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_n!};\ |\alpha| = N\}$. Die Abschätzung in $(*)$ ist möglich, da die 1-Norm und die euklidische Norm auf $\mathbb{N}_0^n$ äquivalent sind; es gilt sogar $C' = 1$. Die gewünschte Abschätzung ergibt sich mit $\gamma = \frac{1}{C_N}$. □

(2.8) Lemma
Für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\begin{aligned} & 1 + |k+l|^2 && \le 2\left(1+|k|^2\right)\left(1+|l|^2\right) \\ \Leftrightarrow\quad & \left(1+|k+l|^2\right)^{\frac{N}{2}} && \le 2^{\frac{N}{2}}\left(1+|k|^2\right)^{\frac{N}{2}}\left(1+|l|^2\right)^{\frac{N}{2}} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow\quad & \left(1+|k+l|^2\right)^{-\frac{N}{2}} && \ge 2^{-\frac{N}{2}}\left(1+|k|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\left(1+|l|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Beweis
Für beliebige $k, l \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\begin{aligned} 1 + |k+l|^2 &\le 1 + |k|^2 + 2|k||l| + |l|^2 \le 2 + 2|k|^2 + 2|k||l| + 2|l|^2 \\ &\le 2 + 2|k|^2 + 2|k|^2|l|^2 + 2|l|^2 = 2\left(1+|k|^2\right)\left(1+|l|^2\right). \end{aligned}$$

Die Äquivalenzen sind offensichtlich. □

(2.9) Lemma
Für $k, l \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\int_{\mathbb{T}^n} e^{i\langle \xi, k-l\rangle} d\xi = \begin{cases} (2\pi)^n, & \text{falls } k = l, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis
Wegen der 2π-Periodizität der Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it}$ und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{i\langle \xi, k-l\rangle} d\xi &= \int\limits_{\mathbb{T}} \cdots \int\limits_{\mathbb{T}} \prod_{j=1}^{n} e^{i\xi_j\left(k_j - l_j\right)} d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n \\ &= \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\mathbb{T}} e^{i\xi_j\left(k_j-l_j\right)} d\xi_j \\ &= 0,\end{aligned}$$

falls $k_j \neq l_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Für $k = l$ folgt

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{i\langle \xi, k-l\rangle} d\xi = \int\limits_{\mathbb{T}^n} 1 d\xi = (2\pi)^n .$$

□

(2.10) Satz
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist die Abbildung $\mathrm{id} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n), f \mapsto f$, injektiv und stetig.

Beweis
Offensichtlich gilt $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \subset L^p(\mathbb{T}^n)$. Nun wird die Abbildung id betrachtet. Angenommen es gilt $\mathrm{id}\, f = \mathrm{id}\, g$, das heißt $\mathrm{id}\, f$ und $\mathrm{id}\, g$ stimmen bis auf eine Nullmenge überein. Da f und g stetig sind, folgt $f = g$, das heißt die Abbildung ist injektiv. Um die Stetigkeit der Abbildung zu zeigen, sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ eine Folge, die in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gegen Null konvergiert, das heißt es gilt

$$|f_l|'_N = \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha f_l\|_\infty \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Es folgt für $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}\|f_l\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} &= \Big(\int\limits_{\mathbb{T}^n} |f_l(\xi)|^p d\xi\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int\limits_{\mathbb{T}^n} \big(\max_{\zeta\in\mathbb{T}^n} |f_l(\zeta)|\big)^p d\xi\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(|f_l|'_1\right)^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} = |f_l|'_1 \cdot \Big(\int\limits_{\mathbb{T}^n} 1 dx\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{p}} |f_l|'_1 \xrightarrow[l\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

sowie für $p = \infty$ die Abschätzung $\|f_l\|_\infty \leq |f_l|'_1 \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$, also ist die Abbildung id stetig.□

3 Der Raum der Schwartzfolgen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften der Schwartzfolgen bewiesen, die in den folgenden Kapiteln benötigt werden. Der Name *Schwartzfolge* erinnert an den Begriff der *Schwartzfunktion*, der aus der Funktional- oder auch Fourieranalysis bekannt sein sollte. Grob gesagt handelt es sich bei einer Schwartzfunktion um eine Funktion, deren partielle Ableitungen schneller fallen als jedes Polynom. Es liegt also nahe, eine Folge, die schneller fällt als jedes Polynom, als Schwartzfolge zu bezeichnen.

(3.1) Definition (Schwartzfolgen)
Eine Folge $f = (f(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$, die

$$\lim_{|k|\to\infty} |f(k)| \, (1+|k|)^N = 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ erfüllt, wird *Schwartzfolge* oder *schnell fallende Folge* genannt. Mit $S(\mathbb{Z}^n)$ wird die Menge aller Schwartzfolgen bezeichnet, also

$$S(\mathbb{Z}^n) := \{f = (f(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}\,;\ \text{für alle } N \in \mathbb{N} \text{ gilt } \lim_{|k|\to\infty} |f(k)| \, (1+|k|)^N = 0\}.$$

(3.2) Bemerkung
Der Raum $S(\mathbb{Z}^n)$ ist ein komplexer Vektorraum. Sind f und g beliebige Elemente aus $S(\mathbb{Z}^n)$, so folgt

$$\lim_{|k|\to\infty} |(f+g)(k)| \, (1+|k|)^N \leq \lim_{|k|\to\infty} \Big(|f(k)| \, (1+|k|)^N + |g(k)| \, (1+|k|)^N \Big) = 0,$$

also ist $f+g$ ein Element von $S(\mathbb{Z}^n)$. Sind $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, so gilt offensichtlich $\lambda f \in S(\mathbb{Z}^n)$.

Das nächste Lemma beschäftigt sich mit einigen Eigenschaften von Schwartzfolgen, welche im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden.

(3.3) Lemma
Es gelten die folgenden Aussagen:

a) Es gilt $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ genau dann, wenn zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N > 0$ existiert, so dass $|f(k)| \, (1+|k|)^N \leq C_N$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist.

b) Es gilt $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ genau dann, wenn $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)| \, (1+|k|)^l$ für alle $l \in \mathbb{N}$ konvergiert.

c) Ist $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so ist $k^\alpha f$ für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein Element von $S(\mathbb{Z}^n)$.

d) Sind $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$, so gilt $f \cdot g \in S(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis

a) Für alle $N \in \mathbb{N}$ gelte

$$|f(k)|\,(1+|k|)^N \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0.$$

Da jede konvergente Folge beschränkt ist, existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N > 0$, so dass $|f(k)|\,(1+|k|)^N \leq C_N$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt.

Existiert andererseits zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N > 0$, so dass

$$|f(k)|\,(1+|k|)^N \leq C_N$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist, so folgt

$$|f(k)|\,(1+|k|)^{N-1} \leq C_N\,(1+|k|)^{-1}.$$

Somit gilt $|f(k)|\,(1+|k|)^{N-1} \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0$. Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

b) Ist f eine Schwartzfolge, so gilt

$$|f(k)|\,(1+|k|)^N \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Zu $l \in \mathbb{N}$ beliebig, wählt man $N > l+1$. Nach a) existiert eine Konstante $C_N > 0$, so dass $|f(k)| \leq C_N\,(1+|k|)^{-N}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist und es folgt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|\,(1+|k|)^l \leq C_N \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{l-N} < \infty.$$

Gilt andererseits

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|\,(1+|k|)^l < \infty$$

für jedes $l \in \mathbb{N}$, so folgt $|f(k)|\,(1+|k|)^l \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0$ für jedes $l \in \mathbb{N}$, also ist f eine Schwartzfolge.

c) Nach Voraussetzung gilt

$$|f(k)|\,(1+|k|)^N \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt $|k^\alpha| \leq |k|^{|\alpha|}$ nach dem Beweis von 2.7 b). Damit folgt

$$\begin{aligned} |k^\alpha f(k)|\,(1+|k|)^N &= |k^\alpha||f(k)|\,(1+|k|)^N \leq |k|^{|\alpha|}|f(k)|\,(1+|k|)^N \\ &\leq |f(k)|\,(1+|k|)^{N+|\alpha|} \xrightarrow[|k|\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, also ist $k^\alpha f$ eine Schwartzfolge.

d) Da f und g Schwartzfolgen sind, existieren nach a) zu jeden $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ Konstanten $C_{N_1}, C_{N_2} > 0$, so dass die Abschätzungen

$$|f(k)| \leq C_{N_1} (1 + |k|)^{-N_1} \quad \text{und} \quad |g(k)| \leq C_{N_2} (1 + |k|)^{-N_2}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt sind. Es folgt für beliebiges $N_3 \in \mathbb{N}, N_3 = N_1 + N_2$,

$$\begin{aligned} |(f \cdot g)(k)| &= |f(k) \cdot g(k)| \leq C_{N_1} C_{N_2} (1 + |k|)^{-N_1} \cdot (1 + |k|)^{-N_2} \\ &= C (1 + |k|)^{-N_3} \end{aligned}$$

für $C := C_{N_1} C_{N_2}$ und alle $k \in \mathbb{Z}^n$, also gilt $f \cdot g \in S(\mathbb{Z}^n)$. □

Da in der Diplomarbeit insbesondere stetige Abbildungen auf $S(\mathbb{Z}^n)$ betrachtet werden sollen, ist es unumgänglich, den Raum $S(\mathbb{Z}^n)$ zu topologisieren.

(3.4) Definition und Bemerkung (Topologie auf $S(\mathbb{Z}^n)$)
Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $N \in \mathbb{N}$ sei

$$|f|_N := \left\| \left(|f(k)| (1 + |k|)^N \right)_{k \in \mathbb{Z}^n} \right\|_\infty .$$

Der Raum der Schwartzfolgen wird durch die Familie $(|\cdot|_N)_{N \in \mathbb{N}}$ von Normen topologisiert. Eine Folge $(f_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ konvergiert im Schwartzraum gegen ein $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, wenn $|f_l - f|_N \xrightarrow[l \to \infty]{} 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt.

Der Raum $S(\mathbb{Z}^n)$ ist kein normierter Vektorraum, da die Folgenkonvergenz in $S(\mathbb{Z}^n)$ nicht mit einer einzigen Norm beschrieben werden kann. Für einige in der Arbeit folgende Beweise ist es aber wichtig zu wissen, dass es sich bei dem Raum der Schwartzfolgen um einen Fréchet-Raum handelt.

(3.5) Satz
Der Raum $S(\mathbb{Z}^n)$ ist ein Fréchet-Raum.

Beweis
Setzt man für $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$

$$d(f, g) := \sum_{N \in \mathbb{N}} 2^{-N} \frac{|f - g|_N}{1 + |f - g|_N},$$

so induziert d die Topologie auf $S(\mathbb{Z}^n)$. Es muss also noch die Vollständigkeit des Raumes gezeigt werden.

Sei dazu $(f^{(l)})_{l \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ eine Cauchyfolge bezüglich $|\cdot|_N$ für alle $N \in \mathbb{N}$, das heißt, für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $L = L(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $l, m \geq L$ gilt

$$|f^{(m)} - f^{(l)}|_N = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\{ |f^{(m)}(k) - f^{(l)}(k)| (1 + |k|)^N \right\} < \varepsilon.$$

Nun wird ein möglicher Kandidat $f^{(0)}$ für den Grenzwert der Folge $(f^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ ermittelt. Für alle $l, m \geq L$ und jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(k) - f^{(l)}(k)| &\leq |f^{(m)}(k) - f^{(l)}(k)|\,(1+|k|)^N \\ &\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\{ |f^{(m)}(k) - f^{(l)}(k)|\,(1+|k|)^N \right\} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist $(f^{(l)}(k))_{l\in\mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ und da $\mathbb{C}$ vollständig ist existiert $f^{(0)}(k) := \lim\limits_{l\to\infty} f^{(l)}(k)$ für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$.

Jetzt wird $f^{(0)} := (f^{(0)}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ definiert; dies ist der Kandidat für den Grenzwert der Folge $(f^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$. Es bleibt zu zeigen, dass $f^{(0)}$ eine Schwartzfolge ist und $(f^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen $f^{(0)}$ konvergiert.

Um zu zeigen, dass $f^{(0)} \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt, wird die Differenz $f^{(m)} - f^{(l)} \in S(\mathbb{Z}^n)$ betrachtet. Nach Lemma 3.3 b) gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f^{(m)}(k) - f^{(l)}(k)|\,(1+|k|)^N < \infty$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Somit ist die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt und es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\sum_{|k|\leq M} |f^{(m)}(k) - f^{(l)}(k)|\,(1+|k|)^N < C$$

für alle $M \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Die Summe $\sum_{|k|\leq M} |f^{(m)}(k) - f^{(l)}(k)|\,(1+|k|)^N$ ist stetig in $f^{(l)}(k)$, also folgt

$$\sum_{|k|\leq M} |f^{(m)}(k) - \underbrace{\lim_{l\to\infty} f^{(l)}(k)}_{=f^{(0)}(k)}|\,(1+|k|)^N < C$$

für alle $M \in \mathbb{N}$. Da die Folge der Partialsummen beschränkt ist, gilt

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f^{(m)}(k) - f^{(0)}(k)|\,(1+|k|)^N < \infty.$$

Aus Lemma 3.3 b) folgt $f^{(m)} - f^{(0)} \in S(\mathbb{Z}^n)$, also ist $f^{(0)}$ eine Schwartzfolge.

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Folge $(f^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen $f^{(0)}$ konvergiert. Da

$$f^{(l)}(k) \xrightarrow[l\to\infty]{} f^{(0)}(k)$$

punktweise gilt, ist auch

$$(1+|k|)^N f^{(l)}(k) \xrightarrow[l\to\infty]{} (1+|k|)^N f^{(0)}(k) \tag{4}$$

für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ punktweise erfüllt. Nach Voraussetzung ist $(f^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $S(\mathbb{Z}^n)$, also existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $\varepsilon > 0$ ein $L = L(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f^{(l)} - f^{(m)}|_N = \left\| \left((1+|k|)^N \left(f^{(l)}(k) - f^{(m)}(k) \right) \right)_{k\in\mathbb{Z}^n} \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $l, m \geq L$ gilt. Zu jedem k existiert wegen (4) aber auch ein $m > L$, so dass

$$\left| (1+|k|)^N \left(f^{(m)}(k) - f^{(0)}(k) \right) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned}\left| (1+|k|)^N \left(f^{(l)}(k) - f^{(0)}(k) \right) \right| &= \left| (1+|k|)^N \left(f^{(l)}(k) - f^{(m)}(k) + f^{(m)}(k) - f^{(0)}(k) \right) \right| \\ &\leq \left| (1+|k|)^N \left(f^{(l)}(k) - f^{(m)}(k) \right) \right| \\ &\quad + \left| (1+|k|)^N \left(f^{(m)}(k) - f^{(0)}(k) \right) \right| \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $l \geq L$ und für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ mit jeweils geeigneter Wahl von m. Dies ist die gleichmäßige Konvergenz, das heißt zu jedem $N \in \mathbb{N}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $L = L(\varepsilon, N)$, so dass für alle $l \geq L$ gilt

$$|f^{(l)} - f^{(0)}|_N = \left\| \left((1+|k|)^N \left(f^{(l)}(k) - f^{(0)}(k) \right) \right)_{k\in\mathbb{Z}^n} \right\|_\infty < \varepsilon.$$

Somit konvergiert die Folge $(f^{(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen $f^{(0)}$. □

(3.6) Lemma

a) Für $1 \leq p \leq \infty$ ist die Abbildung $\mathrm{id} : S(\mathbb{Z}^n) \to l^p(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f$, injektiv und stetig.

b) Der Raum der Schwartzfolgen liegt dicht in $l^2(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis

a) Sei $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, dann existiert nach Lemma 3.3 a) zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N > 0$, so dass $|f(k)| \leq C_N (1+|k|)^{-N}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist. Es folgt für $N > 1$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|^p \leq C_N^p \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-Np} < \infty,$$

also gilt $f \in l^p(\mathbb{Z}^n)$. Die Abbildung $\mathrm{id} : S(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f$, ist injektiv. Um die Stetigkeit von id zu zeigen, sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ eine Folge, die in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen Null konvergiert. Für $1 \leq p < \infty$ und $N > 1$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\begin{aligned}\|f_l\|^p_{l^p(\mathbb{Z}^n)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f_l(k)|^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f_l(k)|^p (1+|k|)^{Np} (1+|k|)^{-Np} \\ &\leq |f_l|_N^p \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-Np} \leq C|f_l|_N^p \xrightarrow[l\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

erfüllt ist. Ist $p = \infty$, so gilt $|f_l(k)| \leq |f_l(k)| \, (1 + |k|)^N$ für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{Z}^n$, also folgt

$$\|f_l\|_\infty \leq \left\| \left(|f_l(k)| \, (1 + |k|)^N \right)_{k \in \mathbb{Z}^n} \right\|_\infty = |f_l|_N \xrightarrow[l \to \infty]{} 0.$$

Die Abbildung id ist somit stetig.

b) Ist f eine Schwartzfolge, so gilt $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ nach a). Nach Bemerkung 2.1 ist $F(\mathbb{Z}^n)$ dicht in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ enthalten und es gilt $F(\mathbb{Z}^n) \subset S(\mathbb{Z}^n) \subset l^2(\mathbb{Z}^n)$, also liegt $S(\mathbb{Z}^n)$ dicht in $l^2(\mathbb{Z}^n)$. □

Im Raum der Schwartzfolgen liest sich die Definition der unbedingten Konvergenz, vgl. Definition A.3, wie folgt.

(3.7) Definition (unbedingte Konvergenz in $S(\mathbb{Z}^n)$)
Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k$ *konvergiert unbedingt* in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $M = M(N, \varepsilon) \subset \mathbb{Z}^n$ existiert, so dass für alle endlichen Mengen $K \supset M$ gilt

$$\left| \sum_{k \in K} f_k - f \right|_N < \varepsilon.$$

Im Falle der unbedingten Konvergenz schreibt man $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f_k$.

Dass die $(\delta_l)_{l \in \mathbb{Z}^n}$ aus Definition 2.1 eine Basis von $S(\mathbb{Z}^n)$ bilden, zeigt das folgende Lemma.

(3.8) Lemma
Ist $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so gilt $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k) \, \delta_k$ mit unbedingter Konvergenz auf der rechten Seite in $S(\mathbb{Z}^n)$ und die Darstellung ist eindeutig.

Beweis
Sei $f \in S(\mathbb{Z}^n)$. Da die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)| \, (1 + |k|)^N$ für alle $N \in \mathbb{N}$ nach Lemma 3.3 b) konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $L = L(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{|k| > L} |f(k)| \, (1 + |k|)^N < \varepsilon$$

erfüllt ist. Wird nun die Menge $M := M(\varepsilon, N) := \{k \in \mathbb{Z}^n \; ; \; |k| \leq L\}$ definiert, so gilt

$$\sum_{l \in M} f(l) \, \delta_l(k) = \begin{cases} f(k), & \text{falls } k \in M, \\ 0, & \text{falls } k \notin M, \end{cases}$$

und es folgt

$$\left| f - \sum_{l \in M} f(l) \, \delta_l \right|_N = \sup_{k \in \mathbb{Z}^n} \left\{ \left| f(k) - \sum_{l \in M} f(l) \, \delta_l(k) \right| (1 + |k|)^N \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left| f(k) - \sum_{l\in M} f(l)\,\delta_l(k) \right| (1+|k|)^N \\
&= \sum_{|k|>L} |f(k)|\,(1+|k|)^N < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sei nun $K \supset M$ eine beliebige endliche Menge, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left| f - \sum_{l\in K} f(l)\,\delta_l \right|_N &= \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\{ \left| f(k) - \sum_{l\in K} f(l)\,\delta_l(k) \right| (1+|k|)^N \right\} \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\{ \left| f(k) - \sum_{l\in M} f(l)\,\delta_l(k) \right| (1+|k|)^N \right\} \\
&= \left| f - \sum_{l\in M} f(l)\,\delta_l \right|_N \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die unbedingte Konvergenz der Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k$ gegen f gezeigt.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, wird angenommen, dass

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k\delta_k$$

gilt, wobei $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ sei. Es folgt

$$f(l) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k \right)(l) = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_k\delta_k \right)(l) = a_l$$

für alle $l \in \mathbb{Z}^n$, also ist die Darstellung eindeutig. □

Dass eine stetige Abbildung auf $S(\mathbb{Z}^n)$ über die Bilder der $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ eindeutig festgelegt wird, besagt das folgende Korollar.

(3.9) Korollar
Ist X ein topologischer Vektorraum und die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to X$ linear und stetig, so ist A durch die Bilder der $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ eindeutig festgelegt.

Beweis
Angenommen es gibt zwei stetige lineare Operatoren $A, B : S(\mathbb{Z}^n) \to X$, die auf den Bildern der $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ übereinstimmen, das heißt es gilt $A\delta_k = B\delta_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt nach Lemma 3.8 $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k$ mit unbedingter Konvergenz auf der rechten Seite. Da A und B stetig sind, folgt mit Satz A.4

$$A(f) = A\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k \right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,A\delta_k$$

sowie

$$B(f) = B\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, \delta_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, B\delta_k$$

mit unbedingter Konvergenz auf den rechten Seiten. Es gilt also

$$A(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, A\delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, B\delta_k = B(f)$$

für beliebiges $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, das heißt $A = B$. □

(3.10) Bemerkung
Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ der Raum aller Folgen über $\mathbb{Z}^n$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann wird eine lineare Abbildung $A : F(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ ebenfalls durch die Bilder der $(\delta_k)_{k \in \mathbb{Z}^n}$ eindeutig festgelegt. Anders ausgedrückt wird eine lineare Abbildung $A : F(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ eindeutig durch die unendliche Matrix $((A\delta_k)(l))_{(k,l) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n}$ beschrieben. Dabei ist zu beachten, dass keine Stetigkeit der Abbildung vorausgesetzt werden muss.

Begründung: Angenommen es existiert eine lineare Abbildung $B : F(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$, so dass $A\delta_k = B\delta_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Ist $f \in F(\mathbb{Z}^n)$ beliebig, so gilt $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, \delta_k$ mit $f(k) \neq 0$ für nur endlich viele $k \in \mathbb{Z}^n$. Da die Abbildungen A und B linear sind, folgt

$$Af = A\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, \delta_k \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, A\delta_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, B\delta_k = B\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, \delta_k \right) = Bf,$$

also die Eindeutigkeit der Abbildung A.

Wie auch auf dem Raum $l^2(\mathbb{Z}^n)$ wird auf dem Raum $S(\mathbb{Z}^n)$ ein Verschiebungsoperator definiert.

(3.11) Definition (Verschiebungsoperator)
Für $l \in \mathbb{Z}^n$ wird der *Verschiebungsoperator* T_l auf $S(\mathbb{Z}^n)$ durch

$$(T_l f)(k) := f(k - l)$$

definiert. Offensichtlich ist die Abbildung T_l wohldefiniert.

(3.12) Lemma
Für $l \in \mathbb{Z}^n$ ist der Verschiebungsoperator $T_l : S(\mathbb{Z}^n) \to S(\mathbb{Z}^n)$ linear und stetig.

Beweis
Um die Stetigkeit zu zeigen, sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ eine Folge, die in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen Null konvergiert. Es folgt mit Lemma 2.7 und Lemma 2.8

$$\begin{aligned} |T_l f_k|_N &= \max_{j \in \mathbb{Z}^n} \left\{ |f_k(j-l)|\, (1 + |j|)^N \right\} \\ &\le C_1 \max_{j \in \mathbb{Z}^n} \left\{ |f_k(j-l)|\, \left(1 + |j|^2\right)^{N/2} \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1 \max_{m\in\mathbb{Z}^n} \left\{ |f_k(m)| \left(1+|m+l|^2\right)^{N/2} \right\} \\
&\leq C_2 \max_{m\in\mathbb{Z}^n} \left\{ |f_k(m)| \left(1+|m|^2\right)^{N/2} \left(1+|l|^2\right)^{N/2} \right\} \\
&= C_2 \left(1+|l|^2\right)^{N/2} \cdot \max_{m\in\mathbb{Z}^n} \left\{ |f_k(m)| \left(1+|m|^2\right)^{N/2} \right\} \\
&\leq C_3 \left(1+|l|^2\right)^{N/2} \cdot |f_k|_N \\
&\leq C\,(1+|l|)^N\,|f_k|_N \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.
\end{aligned}
$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, also ist der Operator T_l stetig. Durch direktes Nachrechnen kann gezeigt werden, dass T_l linear ist. □

(3.13) Definition (Modulationsoperator auf $S(\mathbb{Z}^n)$)
Für $\xi \in \mathbb{T}^n$ wird der *Modulationsoperator* $M_\xi : S(\mathbb{Z}^n) \to S(\mathbb{Z}^n)$ durch

$$\left(M_\xi f\right)(k) := e^{i\langle \xi,k\rangle} \cdot f(k)$$

definiert. Er ist offensichtlich wohldefiniert, linear und wegen $|e^{i\langle\xi,k\rangle}| = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ und alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ isometrisch.

4 Dualräume

Aus der Funktionalanalysis sollte der Begriff des Dualraumes eines Raumes bekannt sein. Trotzdem wird er hier noch einmal wiederholt.

(4.1) Definition
Ist X ein topologischer Vektorraum, so wird mit X' der zugehörige *Dualraum* bezeichnet, das heißt

$$X' := \{f : X \to \mathbb{C}\ ;\ f \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Der Dualraum wird mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ versehen. Nach Konstruktion ist diese Toplogie die Inititaltopologie bezüglich der Abbildungen $(\varphi_x)_{x \in X}$ mit $\varphi_x : X' \to \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$.

4.1 Der Dualraum von $S(\mathbb{Z}^n)$

So wie im Fall der Schwartzfunkionen der Dualraum (der Raum der temperierten Distributionen) betrachtet wird, wird jetzt der Dualraum der Schwartzfolgen definiert. Es zeigt sich, dass der Dualraum der Schwartzfolgen, im Vergleich zum Raum der temperierten Distributionen, konkret bestimmt werden kann. Er enthält alle Folgen auf $\mathbb{Z}^n$, die höchstens polynomial wachsen.

(4.2) Definition (Dualraum von $S(\mathbb{Z}^n)$)
Mit $S'(\mathbb{Z}^n)$ wird der Dualraum der Schwartzfolgen bezeichnet, das heißt

$$S'(\mathbb{Z}^n) := \{g : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}\ ;\ g \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Der Raum $S'(\mathbb{Z}^n)$ wird mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen.

(4.3) Bemerkungen

a) Zur Erinnerung: Eine Abbildung $g : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}$ ist stetig, wenn für alle Folgen $(f_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ mit $f_l \xrightarrow[l \to \infty]{} f$ in $S(\mathbb{Z}^n)$ folgt $g(f_l) \xrightarrow[l \to \infty]{} g(f)$ in $\mathbb{C}$.

b) Da der Raum $S'(\mathbb{Z}^n)$ nicht metrisierbar ist, können beispielsweise Aussagen über die Stetigkeit von Abbildungen auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ nicht mit Hilfe von Folgen bewiesen werden.

c) Wie bereits in Definition 4.1 erwähnt, handelt es sich bei der Topologie auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ um die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen $(\varphi_f)_{f \in S(\mathbb{Z}^n)}$ mit

$$\varphi_f : S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}, g \mapsto g(f).$$

Nach Satz A.1 sind die Abbildungen φ_f für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ stetig.

(4.4) Lemma
Für eine lineare Abbildung $g : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) Es gilt $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$.

(ii) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$|g(f)| \leq C|f|_N.$$

Beweis
Angenommen die Aussage in (ii) gilt nicht, das heißt für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $C > 0$ existiert ein $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so dass $|g(f)| > C|f|_N$ gilt. Dann existiert insbesondere für $C = 2^N$ eine Folge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ mit $|g(f_N)| = 1$, sonst kann f_N durch $\frac{1}{|g(f_N)|}f_N$ ersetzt werden. Es gilt $|f_N|_N < 2^{-N}$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq N$ folgt

$$\begin{aligned} |f_N|_m &= \left\| \left(|f_N(k)| \, (1+|k|)^m\right)_{k\in\mathbb{Z}^n} \right\|_\infty \\ &\leq \left\| \left(|f_N(k)| \, (1+|k|)^N\right)_{k\in\mathbb{Z}^n} \right\|_\infty \\ &= |f_N|_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Also gilt $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ in $S(\mathbb{Z}^n)$. Allerdings gilt nach Konstruktion

$$|g(f_N) - g(0)| = |g(f_N)| = 1 \neq 0.$$

Somit ist g nicht stetig.

Um die andere Richtung zu zeigen, wird angenommen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$ existieren, so dass

$$|g(f)| \leq C|f|_N$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist. Sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $S(\mathbb{Z}^n)$, die in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen ein $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ konvergiert, das heißt es gilt

$$|f_l - f|_M \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

für alle $M \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch für $M = N$. Dann folgt

$$|g(f_l) - g(f)| = |g(f_l - f)| \leq C|f_l - f|_N \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

also ist g nach Definition stetig. □

Wie bereits erwähnt wurde, kann der Dualraum von $S(\mathbb{Z}^n)$ genau bestimmt werden. Dies geschieht im nächsten Satz.

(4.5) Satz
Es gilt

$$S'(\mathbb{Z}^n) = \{(g(k))_{k\in\mathbb{Z}^n} \, ; \, \exists N \in \mathbb{N}, \, \exists C > 0 : \; |g(k)| \leq C\,(1+|k|)^N \;\; \forall\, k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Beweis
Sei

$$M := \{(g(k))_{k\in\mathbb{Z}^n} \;;\; \exists N \in \mathbb{N},\ \exists C > 0 :\ |g(k)| \leq C\,(1+|k|)^N \ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Zuerst wird gezeigt, dass $M \subset S'(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist. Für $g \in M$ wird die Abbildung

$$g\,(f) := (g, f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,g(k)\,.$$

definiert. Sie ist wohldefiniert: Da g ein Element der Menge M ist, gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ sowie ein Konstante $C > 0$, so dass $|g(k)| \leq C\,(1+|k|)^K$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Zudem gibt es ein $N \in \mathbb{N}, N > K+1$, und ein $\widetilde{C}_N > 0$, so dass $|f(k)| \leq \widetilde{C}_N\,(1+|k|)^{-N}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist, da f eine Schwartzfolge ist. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)||g(k)| &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|\,(1+|k|)^K \\ &\leq C\widetilde{C}_N \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{K-N} < \infty.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Abbildung linear und es muss noch die Stetigkeit gezeigt werden. Mit $K, N \in \mathbb{N}$ sowie den Konstanten $C, \widetilde{C}_N$ wie oben gilt

$$\begin{aligned}|(g,f)| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)||g(k)| \\ &\leq C \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)|\,(1+|k|)^N\,(1+|k|)^{K-N} \\ &\leq C|f|_N \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{K-N}}_{=:C_0} = CC_0|f|_N.\end{aligned}$$

Mit Lemma 4.4 folgt $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$.

Nun wird die Inklusion $S'(\mathbb{Z}^n) \subset M$ bewiesen. Sei $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $N \in \mathbb{N}$, dann gilt für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$

$$\begin{aligned}\left| g\,(f) - \sum_{|k|\leq N} f(k)\,g\,(\delta_k) \right| &= \left| g\Big(f - \sum_{|k|\leq N} f(k)\,\delta_k\Big) \right| \\ &\leq C \left| f - \sum_{|k|\leq N} f(k)\,\delta_k \right|_K \xrightarrow[N\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

nach Lemma 4.4 und Lemma 3.8 für ein $K \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$. Es folgt also

$$g\,(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\underbrace{g\,(\delta_k)}_{=:g(k)}.$$

und nach Korollar 3.9 ist $g = (g(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ eindeutig bestimmt. Es muss noch gezeigt werden, dass g in der Menge M enthalten ist. Da g nach Voraussetzung ein Element von $S'(\mathbb{Z}^n)$ ist, existiert nach Lemma 4.4 ein $N \in \mathbb{N}$ sowie eine Konstante $C > 0$, so dass $|(g, f)| \leq C|f|_N$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist. Insbesondere gilt die Ungleichung auch für $\delta_k, k \in \mathbb{Z}^n$, das heißt

$$\begin{aligned}|g(k)| &= |g\,(\delta_k)| \leq C|\delta_k|_N \\ &= C \sup_{l\in\mathbb{Z}^n} \left\{ |\delta_k(l)|\,(1 + |l|)^N \right\} \\ &= C\,(1 + |k|)^N,\end{aligned}$$

also ist g ein Element der Menge M. □

(4.6) Definition und Bemerkung
Ist $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$, so wird für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$

$$(g, f) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\, f(k) \tag{5}$$

definiert. Dabei ist zu beachten, dass die Abbildung

$$S'(\mathbb{Z}^n) \times S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}, (g, f) \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\, f(k)$$

bilinear ist. Streng genommen wurde in Satz 4.5 gezeigt, dass eine lineare, bijektive und isometrische Abbildung zwischen den Räumen M und $S'(\mathbb{Z}^n)$ existiert, die jedem Element aus M sein zugehöriges Funktional der Art (5) in $S'(\mathbb{Z}^n)$ zuordnet; deshalb kann auch von Gleichheit der Mengen gesprochen werden.

(4.7) Lemma
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist die Abbildung $\mathrm{id} : l^p\,(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f$, injektiv und stetig. Dabei wird $f \in l^p\,(\mathbb{Z}^n)$ mit dem zugehörigen Funktional auf $l^q\,(\mathbb{Z}^n), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, identifiziert. Insbesondere ist dann auch die Abbildung $S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f$, injektiv und stetig.

Beweis
Zunächst wird $l^p\,(\mathbb{Z}^n) \subset S'(\mathbb{Z}^n)$ gezeigt. Anschließend wird die Stetigkeit der Abbildung id bewiesen.

Sei $f \in l^p\,(\mathbb{Z}^n)$, dann folgt mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 3.6 a) für beliebiges $g \in S(\mathbb{Z}^n) \subset l^q\,(\mathbb{Z}^n), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\begin{aligned}|(f, g)| = \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, g(k) \right| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f(k)\, g(k)| \\ &\leq \|f\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)} \|g\|_{l^q(\mathbb{Z}^n)} \leq C\|g\|_{l^q(\mathbb{Z}^n)} \leq C'|g|_N\end{aligned}$$

für eine Konstante $C' > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$. Nach Lemma 4.4 ist f also ein Element von $S'(\mathbb{Z}^n)$.

Offensichtlich ist id injektiv. Sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset l^p(\mathbb{Z}^n)$ eine Folge, die in $l^p(\mathbb{Z}^n)$ gegen Null konvergiert. Für die Stetigkeit von id ist zu zeigen, dass

$$(f_l, g) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

für alle $g \in S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist. Sei also $g \in S(\mathbb{Z}^n) \subset l^q(\mathbb{Z}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, beliebig, dann folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$|(f_l, g)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f_l(k)\, g(k)| \leq \|f_l\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)} \|g\|_{l^q(\mathbb{Z}^n)} \leq \widetilde{C} \|f_l\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

für eine Konstante $\widetilde{C} > 0$, das heißt die Abbildung id ist stetig.

Nach Lemma 3.6 a) ist die Abbildung $\mathrm{id}' : S(\mathbb{Z}^n) \to l^p(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f$, injektiv und stetig und somit ist die Abbildung $\mathrm{id} \circ \mathrm{id}' : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f$, injektiv und stetig. □

(4.8) Lemma
Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ der Raum aller Folgen über $\mathbb{Z}^n$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Die Abbildung $\mathrm{id} : S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}, g \mapsto g$, ist stetig.

Beweis
Die Abbildung id ist nach Definition A.1 genau dann stetig, wenn die Abbildungen

$$\varphi_k \circ \mathrm{id} : S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}, g \mapsto g(k)\,,$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ stetig sind. Dabei ist für $k \in \mathbb{Z}^n$ die Abbildung $\varphi_k : \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n} \to \mathbb{C}, g \mapsto g(k)$, die Punktauswertung.

Da $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ mit der Initialtopologie bezüglich der Punktauswertung $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ versehen ist, folgt für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ direkt die Stetigkeit der Abbildung $\varphi_k \circ \mathrm{id}$. □

Im Dualraum der Schwartzfolgen liest sich die Definition der unbedingten Konvergenz, vgl. Definition A.3, wie folgt.

(4.9) Definition (unbedingte Konvergenz in $S'(\mathbb{Z}^n)$)
Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_k$ *konvergiert unbedingt* in $S'(\mathbb{Z}^n)$ gegen $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $M = M(\varepsilon) \subset \mathbb{Z}^n$ existiert, so dass für alle endlichen Mengen $K \supset M$ und alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\left| (g, f) - \left(\sum_{k\in K} g_k, f \right) \right| < \varepsilon.$$

Im Falle der unbedingten Konvergenz schreibt man $g = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_k$.

(4.10) Lemma
Ist $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\, \delta_k$ unbedingt in $S'(\mathbb{Z}^n)$ gegen g.

Beweis
Um die unbedingte Konvergenz zu zeigen, zeigt man, dass für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und für alle $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $M = M(\varepsilon) \subset \mathbb{Z}^n$ existiert, so dass für alle endlichen Mengen $K \supset M$ gilt

$$\left| (g, f) - \left(\sum_{k \in K} g(k)\, \delta_k, f \right) \right| < \varepsilon.$$

Die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)\, g(k)|$ konvergiert, vgl. den Beweis von Satz 4.5. Also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $L = L(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \sum_{|k| > L} |f(k)\, g(k)| \right| = \sum_{|k| > L} |f(k)\, g(k)| < \varepsilon$$

erfüllt ist. Nun wird die Menge $M := \{k \in \mathbb{Z}^n \ ; \ |k| \leq L\}$ definiert. Sei $K \supset M$ eine beliebige endliche Menge und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ beliebig. Dann folgt mit Lemma 3.8

$$\begin{aligned}
\left| (g, f) - \left(\sum_{k \in K} g(k)\, \delta_k, f \right) \right| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k)\, f(k) - \sum_{k \in K} g(k) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l)\, \delta_k(l) \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k)\, f(k) - \sum_{k \in K} g(k)\, f(k) \right| \\
&= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus K} g(k)\, f(k) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus K} |g(k)\, f(k)| \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus M} |f(k)\, g(k)| = \sum_{|k| > L} |f(k)\, g(k)| \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}$$

also gilt $g = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k)\, \delta_k$ mit unbedingter Konvergenz in $S'(\mathbb{Z}^n)$. □

4.2 Der Dualraum von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$

In diesem Abschnitt wird kurz auf den Dualraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{T}^n$ und seine Eigenschaften eingegangen. Dies ist notwendig, um in Kapitel 5, Abschnitt 5.4, die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ definieren zu können. Im Gegensatz zum Dualraum der Schwartzfolgen kann der Dualraum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{T}^n$ nicht konkret angegeben werden.

(4.11) Definition (Dualraum von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$)
Mit $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ wird der Dualraum von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ bezeichnet, das heißt

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)' := \{g : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C} \ ; \ g \text{ ist linear und stetig}\}.$$

Der Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ wird mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen.

(4.12) Bemerkungen

a) Zur Erinnerung: Die Abbildung $g : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ ist stetig, wenn für alle Folgen $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ mit $f_l \xrightarrow[l\to\infty]{} f$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ folgt $g(f_l) \xrightarrow[l\to\infty]{} g(f)$ in $\mathbb{C}$.

b) Da der Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ nicht metrisierbar ist, können beispielsweise Aussagen über die Stetigkeit von Abbildungen auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ nicht mit Hilfe von Folgen bewiesen werden.

c) Wie bereits in Definition 4.1 erwähnt, handelt es sich bei der Topologie auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ um die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen $(\varphi_f)_{f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)}$ mit

$$\varphi_f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)' \to \mathbb{C}, g \mapsto g(f).$$

Nach Satz A.1 sind die Abbildungen φ_f für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ stetig.

(4.13) Lemma

Für eine lineare Abbildung $g : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

(i) Es gilt $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$.

(ii) Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gilt

$$|g(f)| \leq C|f|'_N.$$

Beweis

Angenommen die Aussage in (ii) gilt nicht, das heißt für alle $N \in \mathbb{N}$ und für alle $C > 0$ existiert ein $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, so dass $|g(f)| > C|f|'_N$ gilt. Dann existiert insbesondere für $C = 2^N$ eine Folge $(f_N)_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ mit $|g(f_N)| = 1$, sonst kann f_N durch $\frac{1}{|g(f_N)|} f_N$ ersetzt werden. Es gilt $|f_N|'_N < 2^{-N}$ und für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq N$ folgt

$$\begin{aligned} |f_N|'_m &= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_\infty \leq \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha f\|_\infty \\ &= |f_N|'_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Also gilt $f_N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Allerdings gilt nach Konstruktion

$$|g(f_N) - g(0)| = |g(f_N)| = 1 \neq 0.$$

Somit ist g nicht stetig.

Um die andere Richtung zu zeigen, wird angenommen, dass ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$ existieren, so dass

$$|g(f)| \leq C|f|'_N$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gilt. Sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, die in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gegen ein $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ konvergiert. Das heißt es gilt

$$|f_l - f|'_M \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

für alle $M \in \mathbb{N}$, also insbesondere auch für $M = N$. Dann folgt

$$|g(f_l) - g(f)| = |g(f_l - f)| \leq C|f_l - f|'_N \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

also ist g nach Definition stetig. □

Es folgen typische Beispiele für lineare Funktionale auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

(4.14) Beispiele

a) Wird für beliebiges $\xi \in \mathbb{T}^n$ die Abbildung $\delta_\xi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$, $\left(\delta_\xi, f\right) := f(\xi)$, definiert, so gilt

$$|\left(\delta_\xi, f\right)| = |f(\xi)| \leq \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha f\|_\infty = |f|'_1.$$

Es folgt mit Lemma 4.13, dass δ_ξ ein Element von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ ist.

b) Für $k \in \mathbb{Z}^n$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ wird die Abbildung $e_k : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathbb{C}$ durch

$$(e_k, f) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi,$$

definiert. Offensichtlich ist diese Abbildung wohldefiniert und linear. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} |(e_k, f)| &= (2\pi)^{-n} \left| \int_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi \right| \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(\xi)| d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-n} \sup_{\zeta\in\mathbb{T}^n} |f(\zeta)| \int_{\mathbb{T}^n} 1 d\xi = \sup_{\zeta\in\mathbb{T}^n} |f(\zeta)| \leq |f|'_1, \end{aligned}$$

also ist die Abbildung e_k nach Lemma 4.13 im Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ enthalten.

(4.15) Lemma

Für $1 \leq p \leq \infty$ ist die Abbildung id : $L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$, $f \mapsto f$, injektiv und stetig. Dabei wird $f \in L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ mit dem zugehörigen Funktional auf $L^q(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, identifiziert. Insbesondere ist dann auch die Abbildung $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$, $f \mapsto f$, injektiv und stetig.

Beweis

Zunächst wird $L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ gezeigt. Anschließend wird die Abbildung id auf Injektivität und Stetigkeit untersucht.

Sei $f \in L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gilt nach Satz 2.10 $g \in L^q(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sowie $\|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq c|g|'_1$ für eine Konstante $c > 0$ und es folgt

$$\begin{aligned} |(f, g)| &:= \left| (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \right| \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(\xi)||g(\xi)| d\xi \\ &\leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq C|g|'_1 \end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$ nach der Hölder-Ungleichung. Dann folgt $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ aus Lemma 4.13.

Um die Injektivität der Abbildung id zu zeigen, seien $f_1, f_2 \in L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ mit id $f_1 =$ id f_2. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& (\mathrm{id}\, f_1)(g) = (\mathrm{id}\, f_2)(g) \quad \text{für alle } g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \\
\Leftrightarrow\quad & (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f_1(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f_2(\xi)\, g(\xi)\, d\xi \quad \text{für alle } g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \\
\Leftrightarrow\quad & (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} (f_1(\xi) - f_2(\xi))\, g(\xi)\, d\xi = 0 \quad \text{für alle } g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \\
\Leftrightarrow\quad & f_1 = f_2 \text{ fast überall,}
\end{aligned}$$

also ist die Abbildung id injektiv.

Nun wird die Stetigkeit der Abbildung gezeigt. Dazu sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ eine Folge, die in $L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ gegen Null konvergiert. Für beliebiges $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \subset L^q(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ folgt mit Hilfe der Hölder-Ungleichung

$$|(f_k, g)| \leq (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f_k(\xi)||g(\xi)| d\xi \leq \|f_k\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

das heißt die Abbildung id ist stetig.

Nach Satz 2.10 ist die Abbildung $\mathrm{id}' : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to L^p(\mathbb{T}^n), f \mapsto f$, injektiv und stetig, also ist insbesondere die Abbildung $\mathrm{id} \circ \mathrm{id}' : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)', f \mapsto f$, injektiv und stetig. □

(4.16) Bemerkung
Aufgrund von Lemma 4.15 wird für Elemente $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ bei der Auswertung an der Stelle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ die Schreibweise (g, f) verwendet, auch wenn nicht jedes Funktional g als Integration gegen die Argumente dargestellt werden kann, vgl. Beispiel 4.14 a).

5 Fouriertransformationen

In diesem Kapitel werden Fouriertransformationen auf verschiedenen Räumen betrachtet. Zunächst wird erklärt, wie die Fouriertransformation auf lokalkompakten und σ-kompakten abelschen topologischen Gruppen definiert ist. Daraus ergeben sich insbesondere die Fouriertransformationen auf den Räumen $l^1(\mathbb{Z}^n), l^2(\mathbb{Z}^n), L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ und $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. Darüber hinaus wird die Poissonsche Summenformel auf $l^1(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen. Anschließend werden die Fouriertransformationen auf dem Raum der Schwartzfolgen, dem Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen sowie den zugehörigen Dualräumen definiert. Es werden die wichtigsten Eigenschaften, wie zum Beispiel Bijektivität und Stetigkeit der Transformationen und ihrer Umkehrabbildungen, herausgearbeitet. Der Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen wird betrachtet, da es sich bei diesem Raum um das Bild der Fouriertransformation auf dem Raum der Schwartzfolgen handelt. Außerdem wird diese Fouriertransformation benötigt, um die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ durch Dualität zu definieren.

Im folgenden sei G eine lokalkompakte und σ-kompakte abelsche topologische Gruppe.

(5.1) Definition und Satz (Charakter, Duale Gruppe)
Ein stetiger Homomorphismus $\chi : G \to \mathbb{T}$ heißt *Charakter von* G. Die Menge aller Charaktere von G wird mit $\widehat{G}$ bezeichnet, das heißt

$$\widehat{G} := \{\chi : G \to \mathbb{T} \ ; \ \chi \text{ ist ein Charakter von } G\}.$$

Mit dem punktweisen Produkt

$$\eta\chi(a) := \eta(a)\chi(a), \quad \eta, \chi \in \widehat{G}, a \in G,$$

ist $\widehat{G}$ eine lokalkompakte, σ-kompakte abelsche topologische Gruppe. Man nennt $\widehat{G}$ die zu G *duale Gruppe*.

Beweis
Vgl. [3, Lemma 7.1.2, Theorem 7.1.4]. □

Es folgen zwei einfache Beispiele, bei denen jeweils die dualen Gruppen konkret angegeben werden können.

(5.2) Beispiele
a) Sei $G = \mathbb{Z}^n$, dann ist die duale Gruppe gegeben durch

$$\widehat{\mathbb{Z}^n} = \left\{k \mapsto e^{i\langle\xi,k\rangle} \ ; \ \xi \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n\right\},$$

vgl. [3, Proposition 7.1.1]. Es gilt $\widehat{\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n$. Dazu wird

$$\varphi : \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n \to \widehat{\mathbb{Z}^n}, \varphi(\xi)(k) := e^{i\langle\xi,k\rangle},$$

definiert. Es gilt

$$\varphi(\zeta+\xi)(k) = e^{i\langle\zeta+\xi,k\rangle} = e^{i\langle\zeta,k\rangle}e^{i\langle\xi,k\rangle} = \varphi(\zeta)(k)\,\varphi(\xi)(k)\,,$$

also ist φ ein Homomorphismus und offentsichtlich ist φ bijektiv.

b) Sei $G = \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$, dann ist die duale Gruppe gegeben durch

$$\widehat{\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n} = \left\{\xi \mapsto e^{i\langle\xi,k\rangle}\ ;\ k \in \mathbb{Z}^n\right\},$$

vgl. [3, Proposition 7.1.1]. Es gilt $\widehat{\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n} \cong \mathbb{Z}^n$. Dazu wird

$$\varphi : \mathbb{Z}^n \to \widehat{\mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n}, \varphi(k)(\xi) := e^{i\langle\xi,k\rangle},$$

definiert. Es gilt

$$\varphi(k+l)(\xi) = e^{i\langle\xi,k+l\rangle} = e^{i\langle\xi,k\rangle}e^{i\langle\xi,l\rangle} = \varphi(k)(\xi)\,\varphi(l)(\xi)\,,$$

also ist φ ein Homomorphismus und offentsichtlich ist φ bijektiv.

Nun werden werden die typischen Funktionenräume auf G definiert.

(5.3) Definition
Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(G)$ der Raum aller Borel-messbaren Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$, für die

$$\|f\|_p^p := \int_G |f(x)|^p d\mu(x)$$

endlich ist. Dabei ist μ ein linkes Haarmaß auf G, welches nach [6, Theorem 15.5] existiert.

Auf lokalkompakten, σ-kompakten abelschen topologischen Gruppen kann eine Fouriertransformation wie folgt definiert werden.

(5.4) Definition (Fouriertransformation auf lokalkompakten abelschen Gruppen)
Ist $f \in L^1(G)$, so wird die Funktion

$$\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}, \widehat{f}(\chi) := \int_G \overline{\chi(x)} f(x)\, d\mu(x),$$

Fouriertransformierte von f genannt. Die Abbildung $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ heißt *Fouriertransformation*.

Ein wichtiger Satz im Zusammenhang mit der Fouriertransformation auf $L^2(G)$ ist der Satz von Plancherel.

(5.5) Satz (Satz von Plancherel)
Ist $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$, so gilt $\widehat{f} \in L^2(\widehat{G})$ mit $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$. Die Fouriertransformation auf $L^1(G) \cap L^2(G)$ lässt sich zu einer unitären Abbildung $\mathcal{F} : L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$ fortsetzen.

Beweis
Vgl. [7, Theorem 31.18]. □

(5.6) Bemerkung
Nach Satz 5.1 ist $\widehat{G}$ eine lokalkompakte, σ-kompakte abelsche topologische Gruppe, also existiert nach [6, Theorem 15.5] ein linkes Haarmaß auf $\widehat{G}$. Damit der Satz von Plancherel gilt, muss das zugehörige Haar-Integral auf $\widehat{G}$ geeignet normiert werden.

5.1 Die Fouriertransformationen auf $l^1(\mathbb{Z}^n), l^2(\mathbb{Z}^n), L^1(\mathbb{T}^n)$ und $L^2(\mathbb{T}^n)$

Aus den vorhergehenden Resultaten bezüglich der Fouriertransformation auf lokalkompakten und σ-kompakten abelschen topologischen Gruppen ergeben sich die Fouriertransformationen auf $l^1(\mathbb{Z}^n), l^2(\mathbb{Z}^n), L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ und $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. Dabei spielen sowohl die Beispiele 5.2 und der Satz von Plancherel 5.5 eine Rolle.

(5.7) Beispiele

a) Die Fouriertransformation auf $l^1(\mathbb{Z}^n)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F} : l^1(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{C}(\mathbb{T}^n),$$

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle}.$$

Die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ einer $l^1(\mathbb{Z}^n)$-Folge f ist eine stetige Funktion, da die Reihe gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ konvergiert und die Abbildung $\mathbb{T}^n \ni \xi \mapsto f(k)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ stetig ist.

b) Die Fouriertransformation auf $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) \to l^\infty(\mathbb{Z}^n),$$

$$\widehat{f}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} d\xi.$$

Es gilt

$$|\widehat{f}(k)| \leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} |f(\xi)| d\xi = \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, die Folge der Fourierkoeffizienten $(\widehat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}^n}$ ist also beschränkt.

Da der Satz von Plancherel auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ in dieser Arbeit häufiger benötigt wird, wird er an dieser Stelle aus dem allgemeinen gehaltenen Satz 5.5 abgeleitet, vgl. Beispiele 5.2.

(5.8) Satz (Satz von Plancherel)
Ist $f \in l^2(\mathbb{Z}^n) \cap l^1(\mathbb{Z}^n)$, so gilt $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ mit $\|f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$. Die Fouriertransformation auf $l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$ lässt sich zu einer unitären Abbilung

$$\mathcal{F} : l^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$$

fortsetzen. Es gilt

$$\langle f, g \rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}$$

für alle $f, g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Dieser Satz ist ein Spezialfall von Satz 5.5. Er ist in etwas allgemeinerer Form ebenso in [3, Theorem 8.4.2] zu finden. □

Es folgen einige wichtige Eigenschaften der Fouriertransformationen auf $l^1(\mathbb{Z}^n)$ und $l^2(\mathbb{Z}^n)$.

(5.9) Lemma
Seien $f, g \in l^1(\mathbb{Z}^n) \cup l^2(\mathbb{Z}^n)$.

a) Die Fouriertransformationen auf $l^1(\mathbb{Z}^n)$ und $l^2(\mathbb{Z}^n)$ sind linear.

b) Ist $l \in \mathbb{Z}^n$ und $(T_l f)(k) = f(k-l)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, so gilt

$$(T_l f)^{\widehat{}}\,(\xi) = e^{-i\langle \xi, l \rangle} \cdot \widehat{f}(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ bzw. für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$, wenn es sich bei der Folge f um eine $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Folge handelt.

c) Für $\zeta \in \mathbb{T}^n$ gilt

$$\left(M_\zeta f\right)^{\widehat{}}\,(\xi) = \widehat{f}(\xi - \zeta)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ bzw. für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$, wenn es sich bei der Folge f um eine $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Folge handelt.

d) Sei $f^*(k) := \overline{f}(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt

$$\widehat{f^*}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ bzw. für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$, wenn es sich bei der Folge f um eine $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Folge handelt.

Beweis
Zunächst werden die Aussagen a)–c) für die Fouriertransformation auf $l^1(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen. Schließlich werden mit Hilfe von Dichtheits- und Stetigkeitsargumenten die Aussagen auf die $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Fouriertransformation übertragen, siehe a')–c') in diesem Beweis.

a) Seien $f, g \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gilt aufgrund der absolut gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{T}^n$

$$\mathcal{F}(f+g)(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (f+g)(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \mathcal{F}(f)(\xi) + \mathcal{F}(g)(\xi)$$

sowie

$$\mathcal{F}(\lambda f)(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (\lambda f)(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \lambda \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \lambda\mathcal{F}(f)(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, also ist die Abbildung $\mathcal{F}$ linear.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}(T_l f)^\wedge(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (T_l f)(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k-l)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k+l\rangle} = e^{-i\langle\xi,l\rangle}\widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

c) Es gilt

$$\left(M_\zeta f\right)^\wedge(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{i\langle\zeta,k\rangle} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi-\zeta,k\rangle} = \widehat{f}(\xi-\zeta)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

d) Es gilt wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{T}^n$

$$\begin{aligned}\widehat{f^*}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f^*(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \overline{f(-k)\, e^{i\langle\xi,k\rangle}} = \overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(-k)\, e^{-i\langle\xi,-k\rangle}} \\ &= \overline{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}} = \overline{\widehat{f}}(\xi)\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

Nun werden die Resultate für die $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Fouriertransformation bewiesen. Es gilt

$$S(\mathbb{Z}^n) \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n) \subset l^2(\mathbb{Z}^n)$$

und da der Schwartzraum nach Lemma 3.6 b) dicht in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ enthalten ist, ist auch $l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$ dicht in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ enthalten. Zu einem beliebigen $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ existiert also eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$, die in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegen f konvergiert. Nach dem Satz von Plancherel 5.8 konvergiert dann die Folge $(\widehat{f_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\mathbb{T}^n)$ gegen $\widehat{f}$ und es gibt eine Teilfolge $(\widehat{f_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$, die fast überall gegen $\widehat{f}$ konvergiert, vgl. [4, Kapitel VI, Korollar 2.7]. Nach dem Satz von Plancherel 5.8 konvergiert die Teilfolge $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegen f.

a') Seien $f, g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$. Nach obiger Überlegung existieren dann Folgen

$$(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n) \quad \text{sowie} \quad (g_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n),$$

die in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegen f beziehungsweise g konvergieren. Nach dem Satz von Plancherel 5.8 ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ stetig und nach a) ist die Fouriertransformation auf $l^1(\mathbb{Z}^n)$ linear. Damit folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f+g) &= \mathcal{F}\big(\lim_{k\to\infty} f_k + \lim_{k\to\infty} g_k\big) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}(f_k+g_k)\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{F}(f_k)+\mathcal{F}(g_k)\right) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{F}(f_k) + \lim_{k\to\infty}\mathcal{F}(g_k)\\ &= \mathcal{F}\big(\lim_{k\to\infty} f_k\big) + \mathcal{F}\big(\lim_{k\to\infty} g_k\big) = \mathcal{F}(f)+\mathcal{F}(g).\end{aligned}$$

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$ eine Folge, die in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegen f konvergiert, so gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\lambda f) &= \mathcal{F}\big(\lambda \lim_{k\to\infty} f_k\big) = \lim_{k\to\infty}\mathcal{F}(\lambda f_k) = \lambda \lim_{k\to\infty}\mathcal{F}(f_k)\\ &= \lambda\mathcal{F}\big(\lim_{k\to\infty} f_k\big) = \lambda\mathcal{F}(f),\end{aligned}$$

also ist die Fouriertransformation auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ linear.

b') Es sei $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und die Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$, $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$, $(\widehat{f_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\widehat{f}_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ erfüllen die Eigenschaften in der obigen Überlegung. Der Verschiebungsoperator T_l ist stetig auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ nach Lemma 2.3. Die Fouriertransformation auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ ist nach dem Satz von Plancherel 5.8 stetig und mit der Eigenschaft b) für Folgen aus $l^1(\mathbb{Z}^n)$ folgt dann für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$

$$\begin{aligned}(T_l f)^{\widehat{}}(\xi) &= \big(T_l\big(\lim_{m\to\infty} f_{k_m}\big)\big)^{\widehat{}}(\xi) = \big(\lim_{m\to\infty} T_l f_{k_m}\big)^{\widehat{}}(\xi)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(T_l f_{k_m}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \lim_{m\to\infty} e^{-i\langle\xi,l\rangle}\widehat{f}_{k_m}(\xi)\\ &= e^{-i\langle\xi,l\rangle}\widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

c') Es seien $\zeta \in \mathbb{T}^n$, $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und die Folgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$, $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$, $(\widehat{f_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\widehat{f}_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ erfüllen die Eigenschaften in der obigen Überlegung. Der Modulationsoperator M_ζ ist stetig auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ nach Lemma 2.5. Die Fouriertransformation auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ ist nach dem Satz von Plancherel 5.8 stetig und mit der Eigenschaft c) für Folgen aus $l^1(\mathbb{Z}^n)$ folgt dann für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$

$$\begin{aligned}\left(M_\zeta f\right)^{\widehat{}}(\xi) &= \big(M_\zeta\big(\lim_{m\to\infty} f_{k_m}\big)\big)^{\widehat{}}(\xi) = \big(\lim_{m\to\infty} M_\zeta f_{k_m}\big)^{\widehat{}}(\xi)\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(M_\zeta f_{k_m}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \lim_{m\to\infty}\widehat{f}_{k_m}(\xi-\zeta)\\ &= \widehat{f}(\xi-\zeta).\end{aligned}$$

d') Seien $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$. Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$, $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$, $(\widehat{f_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(\widehat{f_{k_m}})_{m\in\mathbb{N}}$ die Folgen, die die obige Überlegung für f erfüllen. Mit der Stetigkeit der Fouriertransformation auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$, vgl. Satz von Plancherel 5.8, und der Eigenschaft d) für Folgen aus $l^1(\mathbb{Z}^n)$ folgt dann für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$

$$\begin{aligned}\widehat{f^*}(\xi) &= \left(\lim_{m\to\infty} f^*_{k_m}\right)^{\widehat{}}(\xi) = \lim_{m\to\infty} \left(f^*_{k_m}\right)^{\widehat{}}(\xi) \\ &= \lim_{m\to\infty} \overline{\widehat{f}_{k_m}}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(\xi),\end{aligned}$$

also $\widehat{f^*} = \overline{\widehat{f}}$ fast überall. □

5.1.1 Die Poissonsche Summenformel*

Die Poissonsche Summenformel spielt bei der Herleitung der Darstellung eines linearen, stetigen und Γ-invarianten Operator $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ ähnlich wie in [5, Proposition 2.3, Section 3] eine wichtige Rolle. Allgemein, nämlich auf lokalkompakten abelschen Gruppen, wird sie in [7, 31.46 (e)] bewiesen. Da in dieser Arbeit nur die Summenformel für $l^1(\mathbb{Z}^n)$-Folgen benötigt wird, beschränkt sich dieser Abschnitt nur auf den Beweis dieses Falles.

(5.10) Definition
Sei Γ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ mit endlichem Index. Dann wird

$$\Gamma^\perp := \left\{ z \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n \, ; \, e^{i\langle z,\gamma\rangle} = 1 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \right\}$$

Annihilator von Γ *in* $\widehat{\mathbb{Z}^n}$ genannt.

(5.11) Lemma
Sei Γ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ mit endlichem Index. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \Gamma^\perp \to (\widehat{\mathbb{Z}^n/\Gamma}), \varphi(z)(k+\Gamma) := e^{i\langle z,k\rangle},$$

wohldefiniert und ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis
Da der Kern der Abbildung $k \mapsto e^{i\langle z,k\rangle}, z \in \Gamma^\perp$, die Untergruppe Γ enthält, induziert der Homomorphismus $k \mapsto e^{i\langle z,k\rangle}$ einen Homomorphismus von $(\widehat{\mathbb{Z}^n/\Gamma})$. Also ist die Abbildung wohldefiniert.

Angenommen für $w, z \in \Gamma^\perp$ gilt $w \neq z$, dann gibt es ein $l \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $w_l \neq z_l$ erfüllt ist. Für $k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)$ mit 1 an der Stelle l folgt dann

$$\varphi(w)(k) = e^{i\langle w,k\rangle} = e^{iw_l} \neq e^{iz_l} = e^{i\langle z,k\rangle} = \varphi(z)(k).$$

also gilt $\varphi(w) \neq \varphi(z)$, das heißt φ ist injektiv.

Sei nun $\chi \in (\widehat{\mathbb{Z}^n/\Gamma})$. Dann ist $\widetilde{\chi} : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n/\Gamma \to \mathbb{T}, k \mapsto k + \Gamma \mapsto \chi(k+\Gamma)$, ein Homomorphismus, denn für $k, l \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\widetilde{\chi}(k+l) = \chi((k+l)+\Gamma) = \chi(k+\Gamma)\,\chi(l+\Gamma) = \widetilde{\chi}(k)\,\widetilde{\chi}(l).$$

Da alle Homomorphismen $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$ nach Beispiel 5.2 a) die Form

$$k \mapsto e^{i\langle z,k\rangle}, z \in \mathbb{T}^n \cong \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n,$$

haben, gilt $\widetilde{\chi}(k) = e^{i\langle z_0,k\rangle}$ für ein $z_0 \in \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$. Es folgt

$$e^{i\langle z_0,\gamma\rangle} = \widetilde{\chi}(\gamma) = \chi(\gamma+\Gamma) = \chi(\Gamma) = 1$$

für alle $\gamma \in \Gamma$. Also ist z_0 in der Menge $\Gamma^\perp$ enthalten und es gilt

$$\varphi(z_0)(k+\Gamma) = e^{i\langle z_0,k\rangle} = \widetilde{\chi}(k) = \chi(k+\Gamma),$$

also ist φ surjektiv. □

(5.12) Bemerkung
Ist A eine endliche, abelsche Gruppe, so ist auch $\widehat{A}$ eine endliche, abelsche Gruppe, vgl. [3, Theorem 5.1.1, Lemma 5.1.2, Lemma 5.1.3]. Wird die Anzahl der Elemente einer endlichen Gruppe A mit $|A|$ bezeichnet, so gilt $|A| = |\widehat{A}|$, vgl. [3, Lemma 5.1.5]. Nach Voraussetzung hat Γ endlichen Index in $\mathbb{Z}^n$, das heißt $\mathbb{Z}^n/\Gamma$ ist eine endliche, abelsche Gruppe. Nach Lemma 5.11 ist dann auch $\Gamma^\perp$ eine endliche, abelsche Gruppe. Es gilt $|\Gamma^\perp| = |(\widehat{\mathbb{Z}^n/\Gamma})| = |\mathbb{Z}^n/\Gamma|$.

Das folgende Lemma liefert die charakteristische Funktion der Untergruppe Γ. Sie wird nicht nur für den Beweis der Poissonschen Summenformel benötigt, sondern findet unter anderem auch in Kapitel 10 bei der Bestimmung der Fouriertransformierten eines Kanaloperators Verwendung.

(5.13) Lemma
Sei Γ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ mit endlichem Index. Für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\mathbb{1}_\Gamma(k) := |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z,k\rangle} = \begin{cases} 1, & \text{falls } k \in \Gamma, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $\mathbb{1}_\Gamma$ wird *charakteristische Funktion von* Γ genannt.

Beweis
1. Fall: Angenommen k ist ein Element von Γ. Dann gilt $e^{i\langle z,k\rangle} = 1$ für alle $z \in \Gamma^\perp$. Es folgt

$$|\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z,k\rangle} = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} 1 = |\Gamma^\perp|^{-1}|\Gamma^\perp| = 1.$$

2. Fall: Ist $k' \notin \Gamma$, so ist die Abbildung $\psi : z \mapsto e^{-i\langle z,k'\rangle}$ offensichtlich ein Homomorphismus auf $\Gamma^\perp$.

Behauptung: Die Abbildung ψ ist nicht-trivial.
Nach Lemma 5.11 haben die Charaktere von $\mathbb{Z}^n/\Gamma$ die Form $\chi_z : k+\Gamma \mapsto e^{i\langle z,k\rangle}, z \in \Gamma^\perp$, und es gilt für die Folgen $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n} \subset l^2(\mathbb{Z}^n)$

$$\widehat{\delta_k}(\chi_z) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \delta_k(l)\,\overline{\chi_z(l)} = \overline{\chi_z(k+\Gamma)} = e^{-i\langle z,k\rangle}, \quad k+\Gamma \in \mathbb{Z}^n/\Gamma.$$

Angenommen die Abbildung ψ ist trivial. Dann gilt

$$\begin{aligned} & e^{-i\langle z,k'\rangle} = 1 \text{ für alle } z \in \Gamma^\perp \\ \Leftrightarrow\quad & \widehat{\delta_{k'}}(\chi_z) = \widehat{\delta_0}(\chi_z) \text{ für alle } z \in \Gamma^\perp \\ \Leftrightarrow\quad & \widehat{\delta_{k'}} = \widehat{\delta_0} \\ \Leftrightarrow\quad & \delta_{k'} = \delta_0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz gilt, da die Fouriertransformation auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ nach dem Satz von Plancherel 5.8 bijektiv ist. Die letzte Zeile ist offensichtlich ein Widerspruch zu $k' \notin \Gamma$, somit ist die Abbildung ψ nicht-trivial. $\diamond$

Es existiert also ein $z_0 \in \Gamma^\perp$, so dass $e^{-i\langle z_0,k'\rangle} \neq 1$ gilt und es folgt

$$\begin{aligned} |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z,k'\rangle} &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z_0+z,k'\rangle} \\ &= e^{-i\langle z_0,k'\rangle} |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z,k'\rangle}. \end{aligned}$$

Das ist aber äquivalent zu

$$|\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z,k'\rangle} \left(1 - e^{-i\langle z_0,k'\rangle}\right) = 0,$$

und wegen $e^{-i\langle z_0,k'\rangle} \neq 1$ zu

$$|\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z,k'\rangle} = 0,$$

also ist die Behauptung gezeigt. $\square$

(5.14) Bemerkungen
Es gilt $T_\gamma \mathbb{1}_\Gamma = \mathbb{1}_\Gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$, da $k - \gamma \in \Gamma$ genau dann gilt, wenn $k \in \Gamma$ erfüllt ist.

(5.15) Satz (Poissonsche Summenformel)
Für alle $f \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{f}(z).$$

Beweis
Ist $\mathbb{1}_\Gamma$ die charakteristische Funktion von Γ, so folgt für beliebiges $f \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ mit Hilfe von Lemma 5.13

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \mathbb{1}_\Gamma(k) f(k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\left(|\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp} e^{-i\langle z,k\rangle}\right) f(k) \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle z,k\rangle} = |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{f}(z).\end{aligned}$$ □

(5.16) Korollar
Für alle $f \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}(T_\gamma f)(k) = |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{f}(z)\, e^{i\langle z,k\rangle}.$$

Beweis
Es folgt mit Lemma 5.9 b) und der Poissonschen Summenformel 5.15

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Gamma}(T_\gamma f)(k) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} f(k-\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(k+\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma}(T_{-k}f)(\gamma) \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}(T_{-k}f)^\wedge(z) = |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{f}(z)\, e^{-i\langle z,-k\rangle} \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{f}(z)\, e^{i\langle z,k\rangle}.\end{aligned}$$ □

(5.17) Korollar
Ist $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, so gilt für die lineare Abbildung $P : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), Pf = \mathbb{1}_\Gamma \cdot f$,

$$\widehat{Pf}(\xi) = |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp} T_z\widehat{f}(\xi)$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

Beweis
Sind $g, f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, so folgt mit der Hölder-Ungleichung, dass $g\cdot\overline{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ gilt und mit dem Satz von Plancherel 5.8 folgt

$$\begin{aligned}\left(g\cdot\overline{f}\right)^\wedge(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\,\overline{f(k)\, e^{i\langle\xi,k\rangle}} \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}\widehat{g}(\zeta)\,\overline{\left(e^{i\langle\xi,\cdot\rangle}f\right)^\wedge}(\zeta)\, d\zeta \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}\widehat{g}(\zeta)\,\overline{T_\xi\widehat{f}}(\zeta)\, d\zeta \\ &= \left\langle\widehat{g}, T_\xi\widehat{f}\right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}\end{aligned}$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$. Wegen $g \cdot \overline{f} \in l^1(\mathbb{Z}^n)$, folgt mit dem Satz von Plancherel 5.8 und der Poissonschen Summenformel 5.15

$$\begin{aligned}\left\langle \widehat{g}, \widehat{Pf} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} &= \langle g, Pf \rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} g(\gamma)\, \overline{f}(\gamma) = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^\perp} \left(g \cdot \overline{f}\right)^\wedge(z) \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^\perp} \langle \widehat{g}, T_z \widehat{f}\, \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} = \left\langle \widehat{g}, |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^\perp} T_z \widehat{f} \right\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}\end{aligned}$$

für beliebiges $g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, also

$$\widehat{Pf} = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^\perp} T_z \widehat{f}.$$

□

5.2 Die Fouriertransformation auf $S(\mathbb{Z}^n)$

Da die Darstellungen einer linearen, stetigen und Γ-invarianten Abbildung

$$A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$$

auf der Fourierseite formuliert werden, spielt die Fouriertransformation auf dem Raum der Schwartzfolgen eine zentrale Rolle. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt ausführlich alle Eigenschaften der Transformation gezeigt, die später benötigt werden. Das wichtigste Resultat dieses Abschnitts ist ein Satz, der besagt, dass es sich bei der Fouriertransformation um eine topologische Abbildung handelt.

(5.18) Definition (Fouriertransformierte, Fouriertransformation)
Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ wird $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\widehat{f}(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi, k \rangle},$$

die *Fouriertransformierte von f* genannt. Der Operator $\mathcal{F} : f \mapsto \widehat{f}$ heißt *Fouriertransformation*.

Die Fouriertransformation auf dem Raum der Schwartzfolgen ist wohldefiniert.

(5.19) Bemerkung
Ist $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ wohldefiniert, denn für $N \in \mathbb{N}, N > 1$, gibt es eine Konstante $C_N > 0$, so dass

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)\, e^{-i\langle \xi, k \rangle}| = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)| \le C_N \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^{-N} < \infty$$

erfüllt ist. Somit konvergiert die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi, k \rangle}$ gleichmäßig und absolut gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$. Es kann also beispielweise die Summationsreihenfolge verändert werden, ohne dass sich der Wert der Reihe ändert.

Als einfaches Beispiel werden die Fouriertransformierten der $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ bestimmt.

(5.20) Beispiel
Für $\delta_l \in S(\mathbb{Z}^n)\,, l \in \mathbb{Z}^n$, gilt

$$\widehat{\delta_l}\,(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \delta_l(k)\, e^{-i\langle \xi,k\rangle} = e^{-i\langle \xi,l\rangle}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Nun werden einige wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation auf Schwartzfolgen formuliert.

(5.21) Lemma
Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gelten die folgenden Aussagen:

a) Der Operator $\mathcal{F}$ ist linear.

b) Die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ ist 2π-periodisch, sie kann also nach Kapitel 2, Abschnitt 2.1, mit einer Funktion auf dem n-dimensionalen Torus identifiziert werden. Aufgrund von Beispiel 5.7 a) handelt es sich bei der Fouriertransformierten um eine stetige Funktion auf $\mathbb{T}^n$.

c) Ist $l \in \mathbb{Z}^n$ und $(T_l f)(k) = f(k-l)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, so gilt

$$(T_l f)^{\widehat{}}\ (\xi) = e^{-i\langle \xi,l\rangle} \cdot \widehat{f}\,(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

d) Ist $\xi \in \mathbb{T}^n$ und $\big(M_\xi f\big)(k) = e^{i\langle \xi,k\rangle} \cdot f(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, so gilt

$$\big(M_\zeta f\big)^{\widehat{}}\ (\xi) = \widehat{f}\,(\xi - \zeta)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

e) Sei $\widetilde{f}\,(k) := f(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt

$$\widehat{\widetilde{f}}\ (\xi) = \widehat{f}\,(-\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

f) Sei $f^*(k) := \overline{f}(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Dann gilt

$$\widehat{f^*}\,(\xi) = \overline{\widehat{f}}\ (\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

Beweis

a) Der Beweis der Linearität der Fouriertransformation auf $S(\mathbb{Z}^n)$ verläuft analog zum Beweis der Linearität der $l^1\,(\mathbb{Z}^n)$-Fouriertransformation in Lemma 5.9 a).

b) Sei $l \in \mathbb{Z}^n$ beliebig, dann gilt wegen der 2π-Periodizität der Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{-it}$

$$\widehat{f}\,(\xi + 2\pi l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi + 2\pi l, k\rangle} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} \underbrace{e^{-i\langle 2\pi l, k\rangle}}_{=1} = \widehat{f}\,(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, das heißt die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ von f ist 2π-periodisch.

c) Vgl. den Beweis von Lemma 5.9 b).

d) Vgl. den Beweis von Lemma 5.9 c).

e) Es gilt

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{f}}\,(\xi) = &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(-k)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi, -k\rangle} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle -\xi, k\rangle} = \widehat{f}\,(-\xi)\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$.

f) Vgl. den Beweis von Lemma 5.9 d). $\square$

Wie bereits angekündigt wurde, sollen weitere Eigenschaften der Fouriertransformation auf dem Raum der Schwartzfolgen untersucht werden. Das folgende Lemma dient dem Beweis der Injektivität der Transformation.

(5.22) Lemma
Ist $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $\widehat{f}$ die Fouriertransformierte von f, dann gilt

$$f(k) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \widehat{f}\,(\xi)\, e^{i\langle \xi, k\rangle} d\xi.$$

Beweis
Da die Reihe $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{i\langle \xi, k-l\rangle}$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}^n$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ konvergiert und die Abbildung $\xi \mapsto f(l)\, e^{i\langle \xi, k-l\rangle}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$ integrierbar ist, folgt mit Lemma 2.9

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{T}^n} \widehat{f}\,(\xi)\, e^{i\langle \xi, k\rangle} d\xi &= \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{-i\langle \xi, l\rangle} e^{i\langle \xi, k\rangle} d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l) \int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{i\langle \xi, k-l\rangle} d\xi \\ &= f(k)\, (2\pi)^n .\end{aligned}$$

$\square$

(5.23) Satz
Sind $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ mit $\widehat{f} = \widehat{g}$, so gilt $f = g$, das heißt die Fouriertransformation ist injektiv.

Beweis
Setzt man $h := f - g \in S(\mathbb{Z}^n)$, so folgt aufgrund der abolut gleichmäßigen Konvergenz auf $\mathbb{T}^n$

$$\begin{aligned}\widehat{h}\,(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (f(k)-g(k))\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} - \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} \\ &= \widehat{f}\,(\xi) - \widehat{g}\,(\xi) = 0,\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$. Es folgt mit Lemma 5.22

$$h(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{h}\,(\xi)\, e^{i\langle\xi,k\rangle}\, d\xi = 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, also $f(k) = g(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$. □

Dass die Fouriertransformation nicht nur injektiv, sondern bijektiv ist, wird im nächsten Satz gezeigt.

(5.24) Satz
Es gilt $\mathcal{F}(S(\mathbb{Z}^n)) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Beweis
Der Beweis teilt sich in zwei Schritte. Zuerst wird die Inklusion $\mathcal{F}(S(\mathbb{Z}^n)) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gezeigt, der zweite Schritt behandelt dann den Beweis der anderen Inklusion.

Schritt 1: Dass $\mathcal{F}(S(\mathbb{Z}^n)) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ erfüllt ist, wird durch Induktion über $k = |\alpha|$ bewiesen.

Sei $|\alpha| = 1$, ohne Einschränkung $\alpha = (1, 0, \ldots, 0)$. Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ konvergiert die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$. Zudem ist die Abbildung $\xi \mapsto f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ stetig differenzierbar und die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik_1)\, f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$, da $(-ik_1 f(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ nach Lemma 3.3 c) eine Schwartzfolge ist. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ gegen eine differenzierbare Funktion und es gilt

$$D^\alpha \widehat{f}\,(\xi) = D^\alpha \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} \right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik_1)\, f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}.$$

Es existiere nun $D^{\beta'}\widehat{f}$ für $\beta' \in \mathbb{N}_0^n, |\beta'| = 0, \ldots, n$. Sei $\beta := (\alpha_1, \ldots, \alpha_l, \ldots, \alpha_n)$ mit $|\beta| = n$ und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l + 1, , \ldots, \alpha_n)$, also $|\alpha| = n+1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$D^\beta \widehat{f} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik)^\beta\, f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{T}^n$. Zudem konvergiert die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik)^\alpha\, f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik_l)\, (-ik)^\beta\, f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$$

gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$, da nach Lemma 3.3 c) die Folge $\left((-ik)^\alpha f(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ in $S(\mathbb{Z}^n)$ liegt. Damit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik)^\beta f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$$

gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ gegen eine differenzierbare Funktion und es gilt

$$D^\alpha \widehat{f}\,(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik)^\alpha f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$$

mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{T}^n$. Mit dem Prinzip der Induktion folgt, dass die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ gegen eine unendlich oft stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion konvergiert.

Schritt 2: Es muss die Inklusion $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{F}(S(\mathbb{Z}^n))$ gezeigt werden. Wird für eine Funktion $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$

$$f(k) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} F\,(\xi)\, e^{i\langle\xi,k\rangle} d\xi$$

definiert, so folgt mit Hilfe partieller Integration sowie der 2π-Periodizität der Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it}$

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} (D^\alpha F)\,(\xi)\, e^{i\langle\xi,k\rangle} d\xi &= (2\pi)^{-n}\, (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} F\,(\xi)\, (ik)^\alpha\, e^{i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\ &= (-1)^{|\alpha|}\, (ik)^\alpha\, (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} F\,(\xi)\, e^{i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\ &= (-1)^{|\alpha|}\, (ik)^\alpha\, f(k)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}|(-1)^{|\alpha|}\, (ik)^\alpha\, f(k)| = |k^\alpha f(k)| &= \left| (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} (D^\alpha F)\,(\xi)\, e^{i\langle\xi,k\rangle} d\xi \right| \\ &\leq (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \left| (D^\alpha F)\,(\xi) \right| d\xi \\ &= C_\alpha\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Es gibt also zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ eine Konstante $C_\alpha > 0$, so dass $|k^\alpha f(k)| \leq \widetilde{C_\alpha}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist. Nach Lemma 2.7 a) und b) gibt es also zu jedem $N \in \mathbb{N}$ Konstanten $\widetilde{C}_N, C_N > 0$, so dass

$$(1+|k|)^N\, |f(k)| \leq \widetilde{C}_N \sum_{|\alpha|\leq N} |k^\alpha||f(k)| \leq C_N$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist, also ist $f := (f(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ ein Element von $S(\mathbb{Z}^n)$ nach Lemma 3.3 a). Die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}$ konvergiert auf $\mathbb{T}^n$ gleichmäßig gegen eine stetige

Funktion G und die Abbildung $\xi \mapsto f(l)\, e^{-i\langle \xi, l-k\rangle}$ ist für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$ integrierbar, also folgt mit Lemma 2.9

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} G(\xi)\, e^{i\langle \xi,k\rangle} d\xi &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{-i\langle \xi,l\rangle} e^{i\langle \xi,k\rangle} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l) \int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{-i\langle \xi,l-k\rangle} d\xi \\ &= f(k) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} F(\xi)\, e^{i\langle \xi,k\rangle} d\xi.\end{aligned}$$

Da F nach Voraussetzung stetig ist, folgt $F = G$. □

Nachdem die Bijektivität der Transformation gezeigt wurde, stellt sich die Frage, ob topologische Eigenschaften bei der Fouriertransformation erhalten bleiben.

(5.25) Satz
Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ ist topologisch.

Beweis
Nach Satz 5.23 und Satz 5.24 ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ bijektiv. Es muss also die Stetigkeit der Abbildungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ gezeigt werden.

Für beliebiges $\xi \in \mathbb{T}^n$ gilt nach Satz 5.24 und Lemma 2.7 a) und b)

$$\begin{aligned}\left|D^\alpha \widehat{f}(\xi)\right| &= \left|D^\alpha\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi,k\rangle}\right)\right| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} D^\alpha\left(f(k)\, e^{-i\langle \xi,k\rangle}\right)\right| \\ &= \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (-ik)^\alpha f(k)\, e^{-i\langle \xi,k\rangle}\right| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k^\alpha||f(k)| \\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{|\alpha|}|f(k)| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{|\alpha|} (1+|k|)^{-N} (1+|k|)^N |f(k)| \\ &\le |f|_N \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{|\alpha|-N} = C \cdot |f|_N,\end{aligned}$$

für $N > |\alpha| + 1$ und eine Konstante $C > 0$. Es folgt

$$|\widehat{f}|'_N = \sum_{|\alpha|\le N} \|D^\alpha \widehat{f}\|_\infty \le \widetilde{C}|f|_N$$

für eine Konstante $\widetilde{C} > 0$. Ist nun $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $S(\mathbb{Z}^n)$, so folgt

$$\mathcal{F}(f_l) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, also ist die Abbildung $\mathcal{F}$ stetig.

Nun wird die Stetigkeit der Umkehrabbildung gezeigt. Es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\left(D^\alpha \widehat{f}\right)(k) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} D^\alpha \widehat{f}(\xi)\, e^{i\langle \xi, k\rangle} d\xi = (-1)^{|\alpha|}\,(ik)^\alpha f(k)$$

nach dem Beweis von Satz 5.24. Mit Hilfe von Lemma 2.7 b) folgt dann

$$\begin{aligned}(1+|k|)^N |f(k)| &\le C \sum_{|\alpha|\le N} |k^\alpha||f(k)| = C \sum_{|\alpha|\le N} |k^\alpha f(k)| \\ &= C \sum_{|\alpha|\le N} \left|\mathcal{F}^{-1}\left(D^\alpha \widehat{f}\right)(k)\right| \\ &\le C \sum_{|\alpha|\le N} (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left|D^\alpha \widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\ &= C \sum_{|\alpha|\le N} \|D^\alpha \widehat{f}\|_\infty,\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, das heißt $|f|_N \le C|\widehat{f}|'_N$ für eine Konstante $C > 0$, also ist die Abbildung $\mathcal{F}^{-1}$ stetig. □

5.3 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$

Im Folgenden wird die Fouriertransformation auf dem Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{T}^n$ definiert. Diese Definition ist notwendig, um im nächsten Abschnitt die Fouriertransformation auf dem Dualraum der Schwartzfolgen definieren zu können. Zentrale Aussage dieses Abschnitts ist, wie auch im letzten Abschnitt, dass es sich bei der Fouriertransformation um eine topologische Abbildung handelt.

(5.26) Definition (Fouriertransformierte, Fouriertransformation)
Für $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ und $k \in \mathbb{Z}^n$ bezeichnen

$$\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} d\xi, \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

die *Fourierkoeffizienten* von f. Die Abbildung $\mathcal{F}_c : f \mapsto \widehat{f} = (\widehat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}^n}$ heißt *Fouriertransformation*. Offensichtlich ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c$ linear.

Das nächste Lemma ermöglicht es, auf einfachem Wege zu zeigen, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c$ eine topologische Abbildung ist. Außerdem lassen sich mit diesem Lemma die Eigenschaften der Fouriertransformation auf $S(\mathbb{Z}^n)$ aus Lemma 5.21 geeignet auf die Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ übertragen. Da von diesen Eigenschaften der Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ nur einmal, indirekt im Beweis von Satz 5.33, Gebrauch gemacht wird, wird auf eine explizite Auflistung verzichtet.

(5.27) Lemma
Wird für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ die Folge $\widetilde{f} \in S(\mathbb{Z}^n)$ durch $\widetilde{f}(k) := f(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ und für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ die Funktion $\widetilde{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ durch $\widetilde{g}(\xi) := g(-\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ definiert, so gilt $\mathcal{F}_c\mathcal{F}f = \widetilde{f}$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$. Daraus lässt sich direkt folgern, dass $\mathcal{F}\mathcal{F}_c g = \widetilde{g}$ für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ erfüllt ist. Insbesondere gilt $\mathcal{F}_c\left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)\right) = S(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Sei $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ beliebig. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{-i\langle\xi,l\rangle}e^{-i\langle\xi,k\rangle}$ auf $\mathbb{T}^n$, der Integrierbarkeit der Funktion

$$\xi \mapsto f(l)\, e^{-i\langle\xi,l\rangle}e^{-i\langle\xi,k\rangle}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$ und Lemma 2.9

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_c\mathcal{F}f)(k) &= (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} (\mathcal{F}f)(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle}d\xi = (2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{T}^n}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{-i\langle\xi,l\rangle}e^{-i\langle\xi,k\rangle}d\xi \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l)\,(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{-i\langle\xi,l+k\rangle}d\xi = f(-k) = \widetilde{f}(k)\,.\end{aligned}$$

Sei $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ beliebig, dann gibt es nach Satz 5.25 ein $h \in S(\mathbb{Z}^n)$ mit $\mathcal{F}h = g$. Es folgt mit Lemma 5.21 e)

$$\mathcal{F}\mathcal{F}_c g = \mathcal{F}\mathcal{F}_c\mathcal{F}h = \mathcal{F}\widetilde{h} = \widetilde{\mathcal{F}h} = \widetilde{g}.$$

Nach Satz 5.24 gilt $\mathcal{F}(S(\mathbb{Z}^n)) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, also folgt

$$S(\mathbb{Z}^n) = \mathcal{F}_c\mathcal{F}\left(S(\mathbb{Z}^n)\right) = \mathcal{F}_c\left(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)\right). \qquad \square$$

(5.28) Satz
Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to S(\mathbb{Z}^n)$ ist topologisch.

Beweis
Nach Lemma 5.27 gilt $\mathcal{F}\mathcal{F}_c g = \widetilde{g}$ für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, also $\mathcal{F}_c g = \mathcal{F}^{-1}\widetilde{g}$, da die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $S(\mathbb{Z}^n)$ nach Satz 5.25 bijektiv ist. Somit ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c$ bijektiv. Die Stetigkeit von $\mathcal{F}_c$ und $\mathcal{F}_c^{-1}$ folgt ebenso aus Satz 5.25. $\square$

(5.29) Korollar
Der Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ ist ein Fréchet-Raum.

Beweis
Die Aussage folgt direkt aus Satz 3.5 und Satz 5.28. $\square$

5.4 Die Fouriertransformationen auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$

Wie auch im Fall der Schwartzfunktionen und temperierten Distributionen wird in diesem Abschnitt die Fouriertransformation auf dem Dualraum der Schwartzfolgen durch

Dualität definiert. Sie wird bei der Bestimmung einer Darstellung für lineare, stetige und Γ-invariante Operatoren $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ eine wichtige Rolle spielen. Um zu zeigen, dass die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ eine topologische Abbildung ist, wird die Fouriertransformation auf dem Dualraum von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ definiert und ähnlich wie in Abschnitt 5.3 vorgegangen.

(5.30) Definition (Fouriertransformierte, Fouriertransformation)

a) Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ wird mit $\widehat{g} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$,

$$(\widehat{g}, f) := (g, \mathcal{F}_c f)\,, \quad f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n),$$

die *Fouriertransformierte* von g bezeichnet. Die Abbildung

$$\mathcal{F} : S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)', g \mapsto \widehat{g},$$

heißt *Fouriertransformation*.

b) Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ wird mit $\widehat{g} \in S'(\mathbb{Z}^n)$,

$$(\widehat{g}, f) := (g, \mathcal{F} f)\,, \quad f \in S(\mathbb{Z}^n)\,,$$

die *Fouriertransformierte* von g bezeichnet. Die Abbildung

$$\mathcal{F}_c : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)' \to S'(\mathbb{Z}^n), g \mapsto \widehat{g},$$

heißt *Fouriertransformation*.

(5.31) Bemerkungen

a) Die Fouriertransformationen auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ sind wohldefiniert, da die Fouriertransformationen auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ und $S(\mathbb{Z}^n)$ nach den Sätzen 5.28 und 5.25 bijektiv sind. Zudem sind sie offensichtlich linear.

b) Die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ wird, wie die Fouriertransformation auf dem Raum der Schwartzfolgen, mit $\mathcal{F}$ bezeichnet. Die Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ wird, wie die Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, mit $\mathcal{F}_c$ bezeichnet. Wird aus dem Zusammenhang nicht direkt klar, welche Transformation gemeint ist, so wird ausdrücklich darauf hingewiesen.

Um zu zeigen, dass die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ topologisch ist wird, ähnlich wie in Abschnitt 5.3, zunächst gezeigt, in welcher Beziehung die Fouriertransformationen auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ stehen.

(5.32) Lemma

Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ wird die Folge $\widetilde{f} \in S(\mathbb{Z}^n)$ durch $\widetilde{f}(k) := f(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ definiert; für $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ wird die Funktion $\widetilde{h} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ durch $\widetilde{h}(\xi) := h(-\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ definiert.

a) Ist $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$, so gilt $(\mathcal{F}_c\mathcal{F}g, f) = \big(g, \widetilde{f}\big)$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$.

b) Ist $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$, so gilt $(\mathcal{F}\mathcal{F}_c g, h) = \big(g, \widetilde{h}\big)$ für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Beweis
a) Sei $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$. Dann folgt für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ mit Lemma 5.27

$$(\mathcal{F}_c\mathcal{F}g, f) = (\mathcal{F}g, \mathcal{F}f) = (g, \mathcal{F}_c\mathcal{F}f) = \big(g, \widetilde{f}\big).$$

b) Sei $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$. Dann folgt für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ mit Lemma 5.27

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}_c g, h) = (\mathcal{F}_c g, \mathcal{F}_c h) = (g, \mathcal{F}\mathcal{F}_c h) = \big(g, \widetilde{h}\big).$$ □

Nun wird der zentrale Satz dieses Abschnitts formuliert.

(5.33) Satz
Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ ist topologisch.

Beweis
Dieser Beweis teilt sich in fünf Schritte. In den ersten beiden Schritten werden Injektivität und Surjektivität der Fouriertransformation $\mathcal{F}$ gezeigt. Dann wird die Stetigkeit der Abbildungen $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_c$ bewiesen und schließlich aus der Stetigkeit von $\mathcal{F}_c$ mit Hilfe von Lemma 5.32 die Stetigkeit von $\mathcal{F}^{-1}$ gefolgert. In diesem Beweis wird mit $\mathcal{F}'$ die Fouriertransformation auf $S(\mathbb{Z}^n)$ und mit $\mathcal{F}_c'$ die Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ bezeichnet.

Schritt 1: Um die Injektivität der Abbildung $\mathcal{F}$ zu bewiesen, seien g und $h \in S'(\mathbb{Z}^n)$ gegeben mit $\widehat{g} = \widehat{h}$, das heißt es gilt

$$\Big(\widehat{g}, \widetilde{f}\Big) = \big(\widehat{h}, \widetilde{f}\big)$$

für alle $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Da die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c'$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ nach Satz 5.28 bijektiv ist, folgt für beliebige $f \in S(\mathbb{Z}^n)$

$$\begin{aligned}(g, f) &= \Big(g, \mathcal{F}_c'\left(\mathcal{F}_c'^{-1} f\right)\Big) = \Big(\widehat{g}, \mathcal{F}_c'^{-1} f\Big) \\ &= \Big(\widehat{h}, \mathcal{F}_c'^{-1} f\Big) = \Big(h, \mathcal{F}_c'\left(\mathcal{F}_c'^{-1} f\right)\Big) = (h, f)\,,\end{aligned}$$

also gilt $g = h$, das heißt $\mathcal{F}$ ist injektiv.

Schritt 2: Als nächstes wird gezeigt, dass die Abbildung $\mathcal{F}$ surjektiv ist. Sei $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$. Gesucht ist ein $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$, so dass $\widehat{g} = h$ gilt. Es gilt $\widehat{g} = g \circ \mathcal{F}_c'$. Damit folgt, dass $\widehat{g} = h$ äquivalent ist zu $g \circ \mathcal{F}_c' = h$ und dies ist äquivalent zu $g = h \circ \mathcal{F}_c'^{-1}$. Setzt man also $g = h \circ \mathcal{F}_c'^{-1}$, so gilt für beliebiges $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$

$$(\widehat{g}, f) = \big(g, \mathcal{F}_c' f\big) = \Big(h, \mathcal{F}_c'^{-1}\left(\mathcal{F}_c' f\right)\Big) = (h, f)\,,$$

also ist die Abbildung $\mathcal{F}$ surjektiv.

Schritt 3: Nun wird die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ gezeigt. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist nach Definition A.1 genau dann stetig, wenn die Abbildung

$$S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}, g \mapsto (\mathcal{F}g, f) = \left(g, \mathcal{F}_c' f\right)$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ stetig ist. Dies ist nach Bemerkung 4.3 c) erfüllt, da $\mathcal{F}_c' f \in S(\mathbb{Z}^n)$ für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ nach Lemma 5.27 gilt. Somit ist $\mathcal{F}$ stetig.

Schritt 4: Die Stetigkeit der Fouriertransformation $\mathcal{F}_c$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ wird analog zu Schritt 3 bewiesen. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c$ ist nach Definition A.1 genau dann stetig, wenn die Abbildung

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)' \to \mathbb{C}, g \mapsto (\mathcal{F}_c g, f) = \left(g, \mathcal{F}' f\right)$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ stetig ist. Dies ist nach Bemerkung 4.12 c) erfüllt, da $\mathcal{F}' f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ nach Satz 5.24 gilt. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c$ auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ ist also stetig.

Schritt 5: Aus der Stetigkeit von $\mathcal{F}_c$ folgt die Stetigkeit von $\mathcal{F}^{-1}$: Für alle $h \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt $\left(h, \widetilde{f}\right) = \left(\widetilde{h}, f\right)$ und nach Lemma 5.27

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_c \mathcal{F} h, f) &= \left(\mathcal{F} h, \mathcal{F}' f\right) = \left(h, \mathcal{F}_c' \mathcal{F}' f\right) = \left(h, \widetilde{f}\right) \\ &= \left(\widetilde{h}, f\right), \end{aligned}$$

also $\mathcal{F}_c \mathcal{F} h = \widetilde{h}$. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ ist nach den ersten beiden Schritten dieses Beweises bijektiv. Ist also $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ beliebig, so existiert ein $h \in S'(\mathbb{Z}^n)$ mit $\mathcal{F} h = g$. Durch direktes Nachrechnen folgt aus Lemma 5.21 e) mit Hilfe von Lemma 5.27, dass $\mathcal{F}\widetilde{h} = \widetilde{\mathcal{F}h}$ gilt. Somit folgt

$$\mathcal{F}\mathcal{F}_c g = \mathcal{F}\mathcal{F}_c \mathcal{F} h = \mathcal{F}\widetilde{h} = \widetilde{\mathcal{F}h} = \widetilde{g}.$$

Da $\mathcal{F}$ bijektiv ist, folgt $\mathcal{F}^{-1} g = \mathcal{F}_c \widetilde{g}$ für alle $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$. Die Abbildung $\mathcal{F}^{-1}$ ist also stetig. □

(5.34) Korollar
Die Fouriertransformation $\mathcal{F}_c : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)' \to S'(\mathbb{Z}^n)$ ist topologisch.

Beweis
Dies folgt mit Lemma 5.32 aus Satz 5.33. □

Nachdem nun die Fouriertransformationen auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ definiert wurden und gezeigt wurde, dass diese Abbildungen topologisch sind, stellt sich die Frage, ob die Fouriertransformation auf $l^p(\mathbb{Z}^n), p \in \{1, 2\}$, konsitent ist mit der Fouriertransformation des zugehörigen Funktionals in $S'(\mathbb{Z}^n)$. Dafür wird das folgende Lemma benötigt.

(5.35) Lemma
Für $p \in \{1,2\}$ und $f \in l^p(\mathbb{Z}^n)$ sowie $g \in L^p(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, \widehat{g}(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Dabei ist $\widehat{g}$ die $L^p(\mathbb{T}^n)$-Fouriertransformierte der Funktion g und $\widehat{f}$ die $l^p(\mathbb{Z}^n)$-Fouriertransformierte der Folge f.

Beweis
Sei $p = 1$. Da die Reihe $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, g(\xi)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle}$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ konvergiert und die Funktion $\xi \mapsto f(k)\, g(\xi)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ integrierbar ist, folgt mit den Definitionen der Fouriertransformationen auf $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ und $l^1(\mathbb{Z}^n)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, \widehat{g}(k) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} g(\xi)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(k)\, g(\xi)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} g(\xi)\, d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi.
\end{aligned}$$

Für $p = 2$ folgt die Behauptung aus dem Satz von Plancherel 5.8, vgl. [7, Corollary 31.19]. □

(5.36) Bemerkung
Lemma 5.35 liefert die Konsistenz der Fouriertransformation auf $l^1(\mathbb{Z}^n)$ beziehungsweise $l^2(\mathbb{Z}^n)$ mit der Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$, wenn man die zugehörigen Funktionale der Folgen betrachtet. Dies wird nun für den Fall $p = 2$ begründet. Für den Fall $p = 1$ verläuft die Begründung analog.

Sei $g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Ist $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ und $\mathcal{F}_c$ die Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, so gilt mit Lemma 5.35

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}g, f) = (g, \mathcal{F}_c f) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k)\, (\mathcal{F}_c f)(k) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{g}(\xi)\, f(\xi)\, d\xi \\
&= (\widehat{g}, f),
\end{aligned}$$

wobei $\widehat{g}$ die $L^2(\mathbb{T}^n)$-Fouriertransformierte von g ist. Das heißt, die Fouriertransformationen stimmen überein, wenn man das zu $\widehat{g}$ gehörige Funktional betrachtet.

6 Faltungen und Produkte

Dieses Kapitel befasst sich mit Faltungen und punktweisen Produkten auf den bisher vorgestellen Räumen. Außerdem wird der für den weiteren Verlauf der Arbeit wichtige Faltungssatz auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen. Er ist vor allem für Anwendungen in der Signal- und Bildverarbeitung wichtig, da ein Produkt auf der Fourierseite meist leichter bestimmt werden kann als die Faltung, aus der das Produkt resultiert.

(6.1) Definition (Faltung)

a) Für $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ wird die *Faltung* $f * g$ von f mit g durch

$$(f * g)(l) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k)\, g(l-k)$$

definiert. Sie ist aufgrund der Abklingverhalten von f und g wohldefiniert, denn sind $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$, so existieren nach Lemma 3.3 a) zu jeden $N, M \in \mathbb{N}$ Konstanten $C_N, C_M > 0$, so dass die Abschätzungen

$$|f(k)| \leq C_N (1+|k|)^{-N} \quad \text{und} \quad |g(k)| \leq C_M (1+|k|)^{-M}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt sind. Es folgt für $N > 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(k)\, g(l-k)| &\leq C_N C_M \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-N} (1+|l-k|)^{-M} \\ &\leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^{-N} < \infty. \end{aligned}$$

b) Für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ wird die *Faltung* $f * g$ von f mit g durch

$$(f * g)(\xi) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta)\, g(\xi - \zeta)\, d\zeta.$$

definiert. Sie ist wegen der Stetigkeit von f und g wohldefiniert.

Nun werden die direkten Produkte definiert. Sie werden für die in der Arbeit angestrebten Darstellungen benötigt.

(6.2) Definition (punktweises Produkt)

a) Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ wird das *Produkt* $g \cdot f \in S'(\mathbb{Z}^n)$ von g mit f durch

$$(g \cdot f, h) := (g, f \cdot h), \quad h \in S(\mathbb{Z}^n),$$

definiert.

b) Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ wird das *Produkt* $g \cdot f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ von g mit f durch

$$(g \cdot f, h) := (g, f \cdot h), \quad h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$$

definiert.

Es ist nicht gleich klar, warum diese Produkte überhaupt wohldefiniert sind. Dies wird in den nächsten Bemerkungen begründet.

(6.3) Bemerkungen

a) Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt $g \cdot f \in l^\infty(\mathbb{Z}^n)$. Da $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ gilt, existiert eine Konstante $C_1 > 0$ und ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|g(k)| \leq C_1 (1+|k|)^{N_1}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist. Die Folge f ist eine Schwartzfolge, also existiert zu jedem $N_2 \in \mathbb{N}, N_2 \geq N_1$, eine Konstante $C_2 > 0$, so dass $|f(k)| \leq C_2 (1+|k|)^{-N_2}$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Insgesamt folgt damit, dass

$$\begin{aligned}|(g \cdot f)(k)| = |g(k) \cdot f(k)| &\leq C_1 C_2 (1+|k|)^{N_1} (1+|k|)^{-N_2} \\ &\leq C_1 C_2 (1+|k|)^{N_1 - N_2} \leq C\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ und eine Konstante $C > 0$ erfüllt ist, das heißt $g \cdot f$ ist ein Element von $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$.

b) Für $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gilt $g \cdot f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$. Seien $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ und $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ beliebig, aber fest. Es ist zu zeigen, dass die Abbildung $h \mapsto (g \cdot f, h)$ stetig ist.

Behauptung: Die Abbildung $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n), h \mapsto f \cdot h$ ist stetig.
Um die Behauptung zu zeigen, sei $(h_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Mit der Leibnizregel folgt

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty} |f \cdot h_l|'_N &= \lim_{l\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq N} \|D^\alpha (f \cdot h_l)\|_\infty \\ &= \lim_{l\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq N} \left\| \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (D^\beta f)(D^\gamma h_l) \right\|_\infty \\ &\leq \lim_{l\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq N} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \|D^\beta f\|_\infty \|D^\gamma h_l\|_\infty \\ &\leq C_N \lim_{l\to\infty} \sum_{|\alpha|\leq N} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \|D^\beta f\|_\infty \|D^\gamma h_l\|_\infty \\ &\leq C_N \lim_{l\to\infty} \sum_{|\beta|\leq N} \sum_{|\gamma|\leq N} \|D^\beta f\|_\infty \|D^\gamma h_l\|_\infty \\ &= C_N \lim_{l\to\infty} |f|'_N \cdot |h_l|'_N = 0,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C_N > 0$, das heißt die Abbildung $h \mapsto f \cdot h$ ist stetig und die Zwischenbehauptung ist somit gezeigt. $\diamond$

Sei $(h_l)_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ weiterhin die Nullfolge in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ wie oben. Es folgt mit Hilfe der Behauptung, der Stetigkeit und der Linearität von g, dass

$$\lim_{l\to\infty} |(g \cdot f, h_l) - (g \cdot f, 0)| = \lim_{l\to\infty} |(g, f \cdot h_l)| = \left(g, \lim_{l\to\infty} f \cdot h_l\right) = (g, 0) = 0$$

gilt, das heißt die Abbildung $h \mapsto (g \cdot f)(h)$ ist stetig. Da die Abbildung offensichtlich linear ist, folgt $g \cdot f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$.

Mit Hilfe des Verschiebungsoperators auf dem Raum der Schwartzfolgen kann auf dem Dualraum $S'(\mathbb{Z}^n)$ ein Verschiebungsoperator durch Dualität definiert werden.

(6.4) Definition (Verschiebungsoperator)
Für $l \in \mathbb{Z}^n$ und $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ wird der *Verschiebungsoperator* T_l definiert durch

$$(T_l g, f) := (g, T_{-l} f), \quad f \in S(\mathbb{Z}^n).$$

Schließlich soll in diesem Abschnitt noch die Faltung eines Funktionals aus $S'(\mathbb{Z}^n)$ mit einer Schwartzfolge definiert und der Faltungssatz für diese Faltung sowie für die Faltung von $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Folgen formuliert werden.

(6.5) Definition (Faltung)
Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ wird die *Faltung* $g * f$ von g mit f durch

$$(g * f)(l) := \left(g, T_l \widetilde{f}\right)$$

definiert, wobei $\widetilde{f}(k) := f(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt.

(6.6) Lemma
Ist $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so gilt $g * f \in S'(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Nach Satz 4.5 ist zu zeigen, dass ein $M \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$ existieren, so dass

$$|(g * f)(l)| \leq C\,(1 + |l|)^M$$

für alle $l \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist. Nach Lemma 3.12 existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $c > 0$, so dass für jedes $l \in \mathbb{Z}^n$

$$|T_l \widetilde{f}|_N \leq c\,(1 + |l|)^N\,|\widetilde{f}|_N = c\,(1 + |l|)^N\,|f|_N$$

erfüllt ist. Da g ein Element von $S'(\mathbb{Z}^n)$ ist, existiert nach Lemma 4.4 ein $M \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $\widetilde{C} > 0$, so dass

$$\begin{aligned}|(g * f)(l)| &= \left|\left(g, T_l \widetilde{f}\right)\right| \leq \widetilde{C}\left|T_l \widetilde{f}\right|_M \\ &\leq \widetilde{C} c |f|_M\,(1 + |l|)^M = C\,(1 + |l|)^M,\end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$ und alle $l \in \mathbb{Z}^n$ gilt, also ist $g * f$ ein Element von $S'(\mathbb{Z}^n)$. $\square$

(6.7) Satz (Faltungssatz auf $S(\mathbb{Z}^n)$)
Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\left(\widehat{g * f}, h\right) = \left(\widehat{g} \cdot \widehat{f}, h\right)$$

für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Beweis
Nach Lemma 6.6 ist $g * f$ ein Element von $S'(\mathbb{Z}^n)$. Sei nun $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ beliebig. Die Reihe $\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l-k)\, e^{-i\langle\xi,l\rangle}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ und die Abbildung $\xi \mapsto h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,l\rangle}$ ist integrierbar für jedes $l \in \mathbb{Z}^n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{g*f}, h\right) &= \left((g*f), \mathcal{F}_c h\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} (g*f)(l)\,(\mathcal{F}_c h)(l) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} \left(g, T_l \widetilde{f}\right)(\mathcal{F}_c h)(l) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\left(T_l\widetilde{f}\right)(k)\,(\mathcal{F}_c h)(l) \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\, f(l-k)\,(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,l\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\,(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} f(l-k)\, h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,l\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\,(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(m)\, h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,m+k\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\,(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} f(m)\, e^{-i\langle\xi,m\rangle} h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\,(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} \widehat{f}(\xi)\, h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\,\mathcal{F}_c(\widehat{f}\cdot h)(k) = \left(g, \mathcal{F}_c(\widehat{f}\cdot h)\right) = \left(\widehat{g}, \widehat{f}\cdot h\right) \\
&= \left(\widehat{g}\cdot\widehat{f}, h\right).
\end{aligned}$$

□

Unter den Voraussetzungen von Satz 6.7 handelt es sich bei der Abbildung

$$C_g : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto g * f,$$

um eine lineare und stetige Abbildung. Dies wird später in Korollar 8.9 mit Hilfe der Shiftinvarianz der Abbildung bewiesen.

Im folgenden Satz wird ein Faltungssatz auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen. Er folgt aus dem Faltungssatz auf $S(\mathbb{Z}^n)$ 6.7.

(6.8) Satz* (Faltungssatz auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$)
Für $f, g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ gilt $g * f \in S'(\mathbb{Z}^n)$ sowie

$$\left(\widehat{g*f}, h\right) = \left(\widehat{g}\cdot\widehat{f}, h\right)$$

für alle $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Beweis
Nach Bemerkung 2.6 gilt $g * f \in l^\infty(\mathbb{Z}^n)$, nach Lemma 4.7 ist $g * f$ dann in $S'(\mathbb{Z}^n)$ enthalten, wenn man die Folge mit ihrem zugehörigen Funktional identifiziert. Ebenso

gilt $g \in l^2(\mathbb{Z}^n) \subset S'(\mathbb{Z}^n)$. Nach Satz 6.7 gilt dann $g * f = \widehat{g} \cdot \widehat{f}$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$. Sei nun $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, dann existiert nach Lemma 3.6 a) eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$, die in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegen f konvergiert. Nach dem Satz von Plancherel 5.8 konvergiert dann die Folge $(\widehat{f_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\mathbb{T}^n)$ gegen $\widehat{f}$. Es folgt mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}\|\widehat{g} \cdot \widehat{f_k} - \widehat{g} \cdot \widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{T}^n)} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} |\widehat{g}(\xi)||\widehat{f_k}(\xi) - \widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \|\widehat{g}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \|\widehat{f_k} - \widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

also $\widehat{g} \cdot \widehat{f_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \widehat{g} \cdot \widehat{f}$ in $L^1(\mathbb{T}^n)$ und damit nach Lemma 4.15

$$\widehat{g} \cdot \widehat{f_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \widehat{g} \cdot \widehat{f} \tag{6}$$

in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$, wenn man die Produkte mit ihren zugehörigen Funktionalen auf $\mathbb{T}^n$ identifiziert. Nach Bemerkung 2.6 gilt $g * f_k \in l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ sowie $g * f \in l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ und es folgt aufgrund der absoluten Konvergenz und der Hölder Ungleichung

$$\begin{aligned}|(g * f_k)(l) - (g * f)(l)| &= \left| \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} g(m) f_k(l-m) - \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} g(j) f(l-j) \right| \\ &\leq \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |g(m)||(f_k - f)(l-m)| \\ &\leq \|g\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \|f_k - f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

also konvergiert $g * f_k$ in $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ gegen $g * f$ und deshalb nach Lemma 4.7 auch in $S'(\mathbb{Z}^n)$. Da die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ nach Satz 5.33 stetig ist, folgt mit Satz 6.7

$$\widehat{g} \cdot \widehat{f_k} = (g * f_k)\widehat{\ } \xrightarrow[k\to\infty]{} (g * f)\widehat{\ } \tag{7}$$

in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$. Der Raum $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ ist ein Hausdorff-Raum ist und somit folgt aus (6) und (7), dass $(g * f)\widehat{\ } = \widehat{g} \cdot \widehat{f}$ gelten muss. □

7 Der Satz vom Kern

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, gibt es verschiedene Wege, eine Darstellung für einen linearen, stetigen und Γ-invarianten Operator $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ zu bestimmen. Für ein Vorgehen wie in [5, Section 3] ist der Satz vom Kern unerlässlich. Er besagt, dass eine bijektive Abbildung $A : \mathcal{L}\left(S(\mathbb{Z}^n), S'(\mathbb{Z}^n)\right) \to S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ existiert, die jedem Operator $T \in \mathcal{L}\left(S(\mathbb{Z}^n), S'(\mathbb{Z}^n)\right)$ seinen Schwartz-Kern $A(T) \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ zuordnet. Dabei kann der Schwartz-Kern einer linearen und stetigen Abbildung T auf $S(\mathbb{Z}^n)$ als darstellende (unendliche) Matrix von T aufgefasst werden. Mit Hilfe der Fouriertransformation kann ebenso der Satz vom Kern auf dem Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen formuliert werden.

Es stellt sich die Frage, wie der zu einem linearen, stetigen Operator $T : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ gehörige Schwartz-Kern bestimmt werden kann. Dazu wird ein Tensorprodukt benötigt, welches nun definiert wird.

(7.1) Definition (Tensorprodukt)

a) Für $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ ist das *Tensorprodukt* $f \otimes g$ von f mit g definiert durch

$$(f \otimes g)(k_1, k_2) := f(k_1) \cdot g(k_2)$$

für alle $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^n$.

b) Für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ ist das *Tensorprodukt* $f \otimes g$ von f mit g definiert durch

$$(f \otimes g)(\xi_1, \xi_2) := f(\xi_1) \cdot g(\xi_2)$$

für alle $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{T}^n$.

c) Für $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^m)'$, $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ ist das *Tensorprodukt* $F \otimes G$ von F mit G definiert durch

$$(F \otimes G)(f \otimes g) := (F, f) \cdot (G, g)$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^m), g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Im Fall von unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen ist klar, in welchem Raum ihr Tensorprodukt liegt. Betrachtet man aber das Tensorprodukt auf dem Raum der Schwartzfolgen, so ist eine vergleichbare Aussage nicht so einfach zu treffen.

(7.2) Bemerkungen

a) Das Tensorprodukt ist bilinear.

b) Sind f, g in $S(\mathbb{Z}^n)$, so ist $f \otimes g$ ein Element von $S(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Da f und g Schwartzfolgen sind, folgt mit Lemma 3.3 a), dass zu jeden $M, N \in \mathbb{N}$ Konstanten $C_M, C_N > 0$ existieren, so dass die Abschätzungen

$$|f(k)| \leq C_M (1 + |k|)^{-M} \quad \text{und} \quad |g(k)| \leq C_N (1 + |k|)^{-N}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ gelten. Somit folgt für beliebiges $L := \min(M, N) \in \mathbb{N}$ mit Lemma 2.7 und Lemma 2.8, dass

$$\begin{aligned}
|(f \otimes g)(k_1, k_2)| &= |f(k_1)\, g(k_2)| \leq C_M C_N (1 + |k_1|)^{-M} (1 + |k_2|)^{-N} \\
&\leq C_M C_N (1 + |k_1|)^{-L} (1 + |k_2|)^{-L} \\
&\leq c \left(1 + |k_1|^2\right)^{-\frac{L}{2}} \left(1 + |k_2|^2\right)^{-\frac{L}{2}} \\
&= c \left(1 + |(k_1, 0)|^2\right)^{-\frac{L}{2}} \left(1 + |(0, k_2)|^2\right)^{-\frac{L}{2}} \\
&\leq \widetilde{C} \left(1 + |(k_1, 0) + (0, k_2)|^2\right)^{-\frac{L}{2}} \\
&\leq C \left(1 + |(k_1, k_2)|\right)^{-L}
\end{aligned}$$

für alle $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ und eine Konstante $C > 0$ erfüllt ist, das heißt $f \otimes g$ ist ein Element von $S(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$.

c) Offensichtlich ist $f \otimes g$ ein Element von $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)$, da sowohl $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ als auch $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gilt.

Da im Satz vom Kern die Fouriertransformation auf Tensorprodukte angewandt wird, wird nun untersucht, welche Auswirkungen die Transformationen auf ihre Tensorprodukte haben.

(7.3) Lemma

a) Sind $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$, so gilt für alle $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$

$$(f \otimes g)\widehat{\ }\,(\xi) = \left(\widehat{f} \otimes \widehat{g}\right)(\xi).$$

b) Sind $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, so gilt für alle $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$

$$\mathcal{F}_c\,(f \otimes g)(k) = (\mathcal{F}_c f \otimes \mathcal{F}_c g)(k).$$

c) Sind $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$, so gilt für alle $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$

$$\mathcal{F}_c^{-1}\,(f \otimes g)(\xi) = \left(\left(\mathcal{F}_c^{-1} f\right) \otimes \left(\mathcal{F}_c^{-1} g\right)\right)(\xi).$$

Beweis

a) Da $f \otimes g$ nach Bemerkung 7.2 b) ein Element von $S(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ ist, existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
\sum_{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n} |(f \otimes g)(k_1, k_2)| &= \sum_{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n} |f(k_1)\, g(k_2)| \\
&\leq C_N \sum_{(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n} (1 + |(k_1, k_2)|)^{-N}
\end{aligned}$$

erfüllt ist. Somit konvergiert die Reihe

$$\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} (f\otimes g)(k_1,k_2)$$

absolut und die Reihe

$$\sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} (f\otimes g)\,(k_1,k_2)\,e^{-i(\langle\xi_1,k_1\rangle+\langle\xi_2,k_2\rangle)}$$

absolut gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$. Für beliebiges $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n$, folgt

$$\begin{aligned}
(f\otimes g)^{\widehat{}}\,(\xi) &= (f\otimes g)^{\widehat{}}\,(\xi_1,\xi_2)\\
&= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} (f\otimes g)\,(k_1,k_2)\,e^{-i(\langle\xi_1,k_1\rangle+\langle\xi_2,k_2\rangle)}\\
&= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} f(k_1)\,e^{-i\langle\xi_1,k_1\rangle}g(k_2)\,e^{-i\langle\xi_2,k_2\rangle}\\
&= \sum_{k_1\in\mathbb{Z}^n} f(k_1)\,e^{-i\langle\xi_1,k_1\rangle}\sum_{k_2\in\mathbb{Z}^n} g(k_2)\,e^{-i\langle\xi_2,k_2\rangle}\\
&= \widehat{f}\,(\xi_1)\cdot\widehat{g}\,(\xi_2) = \left(\widehat{f}\otimes\widehat{g}\right)(\xi)\,.
\end{aligned}$$

b) Für $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n$ und $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n$ ist die Abbildung

$$(\xi_1,\xi_2)\mapsto f\,(\xi_1)\,g\,(\xi_2)\,e^{-i\langle\xi_1,k_1\rangle}e^{-i\langle\xi_2,k_2\rangle}$$

für alle $k_1,k_2\in\mathbb{Z}^n$ unendlich oft stetig differenzierbar, da $f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ gilt. Insbesondere ist die Abbildung integrierbar und es folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c\,(f\otimes g)\,(k) &= (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{T}^{2n}} (f\otimes g)\,(\xi)\,e^{-i\langle\xi,k\rangle}d\xi\\
&= (2\pi)^{-2n}\int_{\mathbb{T}^{2n}} f\,(\xi_1)\,g\,(\xi_2)\,e^{-i\langle\xi_1,k_1\rangle}e^{-i\langle\xi_2,k_2\rangle}d\xi\\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} f\,(\xi_1)\,e^{-i\langle\xi_1,k_1\rangle}d\xi_1\cdot(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{T}^n} g\,(\xi_2)\,e^{-i\langle\xi_2,k_2\rangle}d\xi_2\\
&= (\mathcal{F}_c f)\,(k_1)\cdot(\mathcal{F}_c g)\,(k_2) = (\mathcal{F}_c f\otimes\mathcal{F}_c g)\,(k)
\end{aligned}$$

c) Mit der gleichen Argumentation wie im Beweis von Teil a) folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c^{-1}\,(f\otimes g)\,(\xi) &= \mathcal{F}_c^{-1}\,(f\otimes g)\,(\xi_1,\xi_2)\\
&= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} (f\otimes g)\,(k_1,k_2)\,e^{i(\langle\xi_1,k_1\rangle+\langle\xi_2,k_2\rangle)}\\
&= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} f(k_1)\,e^{i\langle\xi_1,k_1\rangle}g(k_2)\,e^{i\langle\xi_2,k_2\rangle}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}^n} f(k_1)\, e^{i\langle \xi_1, k_1\rangle} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}^n} g(k_2)\, e^{i\langle \xi_2, k_2\rangle} \\
&= \left(\mathcal{F}_c^{-1} f\right)(\xi_1) \cdot \left(\mathcal{F}_c^{-1} g\right)(\xi_2) \\
&= \left(\left(\mathcal{F}_c^{-1} f\right) \otimes \left(\mathcal{F}_c^{-1} g\right)\right)(\xi)
\end{aligned}
$$

für alle $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n$. □

7.1 Der Satz vom Kern auf $S(\mathbb{Z}^n)$

Nun wird der Hauptsatz dieses Kapitels bewiesen.

(7.4) Satz* (Der Satz vom Kern auf $S(\mathbb{Z}^n)$)
Sei $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Wird für $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ die Abbildung $T : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ durch

$$(Tf, g) := (S, g \otimes f) \tag{8}$$

definiert, so ist T linear und stetig. Außerdem ist T eindeutig festgelegt durch die Gleichung in (8).

Umgekehrt existiert zu jeder linearen und stetigen Abbildung $T : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ ein eindeutiges $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$, so dass für alle $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ die Gleichheit in (8) erfüllt ist. Man nennt $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ den *Schwartz-Kern* von T.

Beweis
Aufgrund seiner Länge wird der Beweis in mehrere Schritte geteilt. Im ersten Schritt wird aus einem gegebenen Element $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ der zugehörige Operator T bestimmt und nachgewiesen, dass dieser stetig ist. Im zweiten Schritt wird, ausgehend von einem Operator $T \in \mathcal{L}\left(S(\mathbb{Z}^n), S'(\mathbb{Z}^n)\right)$, der zugehörige Schwartz-Kern bestimmt und die Eindeutigkeit des Kerns gezeigt. Die Schwierigkeit in diesem Schritt besteht darin, zu zeigen, dass der Schwartz-Kern ein Element der Menge $S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ ist.

Schritt 1: Sei $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ gegeben. Für $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ wird dann durch

$$(Tf, g) := (S, g \otimes f)$$

eine Abbildung $T : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ definiert. Es müssen Linearität, Stetigkeit sowie Eindeutigkeit der Abbildung T gezeigt werden.

Linearität: Seien dazu $f, g, h \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ beliebig, dann folgt aufgrund der Bilinearität des Tensorprodukts

$$
\begin{aligned}
(T(\alpha f + \beta h), g) &= (S, g \otimes (\alpha f + \beta h)) = (S, g \otimes (\alpha f)) + (S, g \otimes (\beta h)) \\
&= (S, \alpha(g \otimes f)) + (S, \beta(g \otimes h)) = \alpha\,(S, g \otimes f) + \beta\,(S, g \otimes h)
\end{aligned}
$$

$$= \alpha\,(Tf,g) + \beta\,(Th,g) = (\alpha Tf + \beta Th, g)\,,$$

also ist T linear.

Stetigkeit: Um die Stetigkeit zu zeigen, sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $S(\mathbb{Z}^n)$, dann muss

$$Tf_l \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$$

in $S'(\mathbb{Z}^n)$ gezeigt werden. Nach Bemerkung 7.2 b) liegen für beliebiges $g \in S(\mathbb{Z}^n)$ die Tensorprodukte $g \otimes f_l$ und $g \otimes 0 = 0$ in der Menge $S(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$, also folgt mit Lemma 4.4, Lemma 2.7 a) und Lemma 2.8

$$\begin{aligned}
|(Tf_l,g) - (T0,g)| &= |(S, g\otimes f_l)| \le C_1 |(g\otimes f_l)|_N \\
&= C_1 \max_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n\\ k\in\mathbb{Z}^n}} \left\{ (1+|(j,k)|)^N\, |g(j)||f_l(k)| \right\} \\
&\le C_2 \max_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n\\ k\in\mathbb{Z}^n}} \left\{ \left(1+|(j,k)|^2\right)^{\frac{N}{2}} |g(j)||f_l(k)| \right\} \\
&= C_2 \max_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n\\ k\in\mathbb{Z}^n}} \left\{ \left(1+|(j,0)+(0,k)|^2\right)^{\frac{N}{2}} |g(j)||f_l(k)| \right\} \\
&\le C_3 \max_{\substack{j\in\mathbb{Z}^n\\ k\in\mathbb{Z}^n}} \left\{ \left(1+|(j,0)|^2\right)^{\frac{N}{2}} \left(1+(0,k)|^2\right)^{\frac{N}{2}} |g(j)||f_l(k)| \right\} \\
&\le C \max_{j\in\mathbb{Z}^n} \left\{ (1+|j|)^N\, |g(j)| \right\} \cdot \max_{k\in\mathbb{Z}^n} \left\{ (1+|k|)^N\, |f_l(k)| \right\} \\
&= C|g|_N |f_l|_N \xrightarrow[l\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, das heißt die Abbildung T ist stetig.

Eindeutigkeit: Um die Eindeutigkeit von T zu zeigen, gelte

$$(Tf,g) = 0$$

für alle $f,g \in S(\mathbb{Z}^n)$. Dann gilt insbesondere

$$0 = (T\delta_k, \delta_l) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} (T\delta_k)(j)\,\delta_l(j) = (T\delta_k)(l)$$

für alle $k,l \in \mathbb{Z}^n$. Sei nun $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ beliebig, dann gilt $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k$ mit unbedingter Konvergenz in $S(\mathbb{Z}^n)$ nach Lemma 3.8 und es folgt mit Satz A.4

$$(Tf)(l) = T\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k(l) \right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,(T\delta_k)(l) = 0$$

für alle $l \in \mathbb{Z}^n$. Somit ist $T \equiv 0$ und die Eindeutigkeit von T damit gezeigt.

Schritt 2: Sei nun $T : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ linear und stetig. Zu Beginn wird gezeigt, dass der mögliche Kandidat S für den Schwartz-Kern die Gleichung in (8) erfüllt, falls er in der Menge $S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ liegt. Dann wird bewiesen, dass der so festgelegte Kandidat eindeutig ist. Schließlich, und dass ist der umfangreiche Teil dieses Beweisschrittes, wird gezeigt, dass $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist, das heißt also, dass es sich bei dem Kandidaten für den Schwarz-Kern tatsächlich um dem Schwartz-Kern handelt.

Für $k, l \in \mathbb{Z}^n$ wird $S(k,l) := (T\delta_l)(k)$ definiert. Angenommen es gilt $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$, so folgt für alle $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ nach Satz A.4

$$\begin{aligned}(Tf, g) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (Tf)(k)\, g(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} T\big(\sum_{j \in \mathbb{Z}^n} f(j)\, \delta_j \big)(k)\, g(k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} \big(T\delta_j\big)(k)\, f(j)\, g(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} S(k,j) f(j)\, g(k) \\ &= (S, g \otimes f)\,,\end{aligned}$$

das heißt die Gleichung in (8) ist erfüllt.

Um die Eindeutigkeit von S zu zeigen wird angenommen, dass $(S, g \otimes f) = 0$ für alle $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt. Dann gilt insbesondere

$$0 = (S, \delta_k \otimes \delta_l) = \sum_{(j,m) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n} S(j,m) \delta_k(j)\, \delta_l(m) = S(k,l)$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$, also ist $S \equiv 0$ und S somit eindeutig.

Es muss noch gezeigt werden, dass S, definiert durch $S(k,l) := (T\delta_l)(k)\,, k, l \in \mathbb{Z}^n$, ein Element von $S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ ist. Grobes Vorgehen ist hier, eine Bilinearform Φ auf $S(\mathbb{Z}^n) \times S(\mathbb{Z}^n)$ zu definieren, ihre Stetigkeit zu zeigen und daraus eine Abschätzung der Form $|\Phi(f,g)| \le C |f|_{N_1} |g|_{N_2}$ für eine Konstante $C > 0$ und natürliche Zahlen N_1, N_2 abzuleiten. Aus dieser Abschätzung kann dann gewonnen werden, dass S in der Menge $S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ enthalten ist.

Wird die Abbildung $\Phi : S(\mathbb{Z}^n) \times S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}$ durch

$$\Phi(f,g) := (Tf, g)$$

für alle $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ definiert, so gilt für alle $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\Phi(f_1 + f_2, g) &= (T(f_1 + f_2), g) = (Tf_1, g) + (Tf_2, g) \\ &= \Phi(f_1, g) + \Phi(f_2, g)\,, \\ \Phi(f, g_1 + g_2) &= (Tf, g_1 + g_2) = (Tf, g_1) + (Tf, g_2) \\ &= \Phi(f, g_1) + \Phi(f, g_2)\,, \\ \Phi(\alpha f, g) &= (T(\alpha f), g) = \alpha(Tf, g) = \alpha \Phi(f, g)\end{aligned}$$

sowie

$$\Phi(f,\beta g) = (Tf,\beta g) = \beta(Tf,g) = \beta\Phi(f,g),$$

also ist die Abbildung Φ bilinear. Nun wird die Stetigkeit von Φ gezeigt, indem gezeigt wird, dass die Bilinearform in jedem ihrer Argumente getrennt stetig ist. Sei dazu $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ eine Folge, die in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen ein $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ konvergiert. Da T stetig ist, folgt

$$Tf_l \xrightarrow[l\to\infty]{} Tf$$

in $S'(\mathbb{Z}^n)$, das heißt

$$\Phi(f_l,g) = (Tf_l,g) \xrightarrow[l\to\infty]{} (Tf,g) = \Phi(f,g)$$

für alle $g \in S(\mathbb{Z}^n)$, also ist $\Phi(\cdot,g)$ für festes $g \in S(\mathbb{Z}^n)$ stetig. Sei nun $(g_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ eine Folge, die in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen ein $g \in S(\mathbb{Z}^n)$ konvergiert. Da Tf ein Element von $S'(\mathbb{Z}^n)$ ist, ist die Abbildung $(Tf,\cdot) : g \mapsto (Tf,g)$ stetig und es folgt

$$\Phi(f,g_l) = (Tf,g_l) \xrightarrow[l\to\infty]{} (Tf,g) = \Phi(f,g).$$

Somit ist die Abbildung $\Phi(f,\cdot)$ für festes $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ stetig und aus Satz A.5 folgt die Stetigkeit von Φ. Insbesondere ist also Φ stetig in $\underline{0} := (0,0) \in S(\mathbb{Z}^n) \times S(\mathbb{Z}^n)$, das heißt zu jeder Nullumgebung V in $\mathbb{C}$ existiert eine Nullumgebung U in $S(\mathbb{Z}^n) \times S(\mathbb{Z}^n)$ mit $\Phi(U) \subset V$. Sei $\varepsilon > 0$, dann wird

$$V := B_\varepsilon(0) := \{y \in \mathbb{C}, |y| < \varepsilon\} \subset \mathbb{C}$$

definiert. Die Menge U ist eine Nullumgebung in $S(\mathbb{Z}^n) \times S(\mathbb{Z}^n)$, also gibt es Nullumgebungen $U_1, U_2 \subset S(\mathbb{Z}^n)$ mit $\underline{0} \in U_1 \times U_2 \subset U$. Nullumgebungen in $S(\mathbb{Z}^n)$ enthalten die Mengen

$$B_{\delta,N}(0) := \{f \in S(\mathbb{Z}^n)\,;\ |f|_N \leq \delta\},$$

$\delta > 0, N \in \mathbb{N}$, da

$$\{B_{\delta,N}(0)\,;\ \delta > 0, N \in \mathbb{N}\}$$

eine Umgebungsbasis der Null in $S(\mathbb{Z}^n)$ ist. Es wird $U_i := B_{\delta_i,N_i}(0)$ für $i = 1,2$ definiert. Die Stetigkeit von Φ in $\underline{0}$ besagt also, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ Konstanten $\delta_1, \delta_2 > 0$ und $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $(\widetilde{f},\widetilde{g}) \subset U_1 \times U_2 \subset U$ gilt $\Phi(\widetilde{f},\widetilde{g}) \in B_\varepsilon(0)$. Mit anderen Worten bedeutet das, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ positive reelle Zahlen δ_1, δ_2 und $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in S(\mathbb{Z}^n)$ mit $|\widetilde{f}|_{N_1} \leq \delta_1$ und $|\widetilde{g}|_{N_2} \leq \delta_2$ gilt $|\Phi(\widetilde{f},\widetilde{g})| < \varepsilon$. Setzt man nun $\widetilde{f} := (\delta_1/|f|_{N_1})\, f$ und $\widetilde{g} := (\delta_2/|g|_{N_2})\, g$ für beliebige $f, g \in S(\mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}$, so gilt $|\widetilde{f}|_{N_1} = \delta_1$ und $|\widetilde{g}|_{N_2} = \delta_2$ und es folgt

$$\begin{aligned} |(Tf,g)| = |\Phi(f,g)| &= \frac{|f|_{N_1}}{\delta_1} \cdot \frac{|g|_{N_2}}{\delta_2} |\Phi(\widetilde{f},\widetilde{g})| \\ &< \frac{\varepsilon}{\delta_1\delta_2} |f|_{N_1} |g|_{N_2} = C \cdot |f|_{N_1} |g|_{N_2} \end{aligned}$$

für $C := \frac{\varepsilon}{\delta_1\delta_2}$. Es gilt $(S(m,k))_{m\in\mathbb{Z}^n} = ((T\delta_k)(m))_{m\in\mathbb{Z}^n} \in S'(\mathbb{Z}^n)$. Nach Lemma 4.10 und obiger Argumentation existieren $C > 0$ sowie $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} |S(m,k)| &= \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} S(l,k)\,\delta_l\,(m) \right| = \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} S(l,k)\,\delta_m\,(l) \right| = \left| \sum_{l\in\mathbb{Z}^n} (T\delta_k)(l)\,\delta_m\,(l) \right| \\ &= |(T\delta_k, \delta_m)| \le C|\delta_k|_{N_1}|\delta_m|_{N_2} = C\,(1+|k|)^{N_1}\,(1+|m|)^{N_2} \\ &\le C\,(1+|(m,k)|)^{N_1}\,(1+|(m,k)|)^{N_2} \\ &\le C\,(1+|(m,k)|)^{2N_3}\,, \end{aligned}$$

erfüllt ist, wobei $N_3 := \max(N_1, N_2)$ gilt. Nach Satz 4.5 gilt dann $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$. □

7.2 Der Satz vom Kern auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$

Nachdem der Satz vom Kern auf dem Raum der Schwartzfolgen gezeigt wurde, ist es aufgrund der Eigenschaften der Fouriertransformationen auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ und $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ ein Leichtes, den Satz vom Kern auch auf dem Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen zu beweisen.

(7.5) Satz (Der Satz vom Kern auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$)
Sei $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)'$. Wird für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ die Abbildung $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ durch

$$(Tf, g) := (S, g \otimes f) \tag{9}$$

definiert, so ist T linear und stetig. Außerdem ist T eindeutig festgelegt durch die Gleichung in (9).

Umgekehrt existiert zu jeder linearen und stetigen Abbildung $T : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ ein eindeutiges $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)'$, so dass für alle $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ die Gleichheit in (9) erfüllt ist. Man nennt $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n \times \mathbb{T}^n)'$ den *Schwartz-Kern* von T.

Beweis
In diesem Beweis bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ und $\mathcal{F}_c$ die Fouriertransformation auf $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Der Beweis wird, wie auch der Beweis vom Satz vom Kern auf $S(\mathbb{Z}^n)$ 7.4, in zwei Schritte geteilt.

Schritt 1: Um die ersten Aussage des Satzes zu zeigen, wird $\widetilde{S} := \mathcal{F}^{-1}S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ und sowie für $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g} \in S(\mathbb{Z}^n)$ die Abbildung $\widetilde{T} : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ durch

$$\left(\widetilde{T}\widetilde{f}, \widetilde{g}\right) := \left(\widetilde{S}, \widetilde{g} \otimes \widetilde{f}\right)$$

definiert. Nach dem Satz vom Kern auf $S(\mathbb{Z}^n)$ 7.4 ist $\widetilde{T}$ linear und stetig. Werden nun $T := \mathcal{F}\widetilde{T}\mathcal{F}_c$ und $\widehat{f}_c := \mathcal{F}_c(f) \in S(\mathbb{Z}^n)$ sowie $\widehat{g}_c := \mathcal{F}_c(g) \in S(\mathbb{Z}^n)$ für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$

definiert, so folgt mit Definition 5.30 und Lemma 7.3 c)

$$\begin{aligned}(Tf,g) &= \left(\mathcal{F}\widetilde{T}\mathcal{F}_c f,g\right) = \left(\mathcal{F}\widetilde{T}\widehat{f}_c,g\right) = \left(\widetilde{T}\widehat{f}_c,\mathcal{F}_c g\right) = \left(\widetilde{T}\widehat{f}_c,\widehat{g}_c\right) \\ &= \left(\widetilde{S},\widehat{g}_c\otimes\widehat{f}_c\right) = \left(\widetilde{S},\mathcal{F}_c\left(\mathcal{F}_c^{-1}\left(\widehat{g}_c\otimes\widehat{f}_c\right)\right)\right) \\ &= \left(\mathcal{F}\widetilde{S},\mathcal{F}_c^{-1}\left(\widehat{g}_c\otimes\widehat{f}_c\right)\right) = \left(S,\mathcal{F}_c^{-1}\left(\widehat{g}_c\right)\otimes\mathcal{F}_c^{-1}(\widehat{f}_c)\right) \\ &= (S,g\otimes f)\,,\end{aligned} \tag{10}$$

also ist die Gleichung in (9) erfüllt und da sowohl $\mathcal{F}$ als auch $\mathcal{F}_c$ linear und topologisch sind, ist die Abbildung T linear, stetig und eindeutig festgelegt durch die Gleichung in (9).

Schritt 2: Sei nun $T:\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)\to\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)'$ linear und stetig. Man definiert nun

$$\widetilde{T}:=\mathcal{F}^{-1}T\mathcal{F}_c^{-1}:S(\mathbb{Z}^n)\to S'(\mathbb{Z}^n).$$

Da $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_c$ linear und topologisch sind, ist $\widetilde{T}$ linear und stetig. Es folgt mit dem Satz vom Kern auf $S(\mathbb{Z}^n)$ 7.4, dass ein eindeutiges $\widetilde{S}\in S'(\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n)$ existiert, so dass für alle $\widetilde{f},\widetilde{g}\in S(\mathbb{Z}^n)$

$$\left(\widetilde{T}\widetilde{f},\widetilde{g}\right) = \left(\widetilde{S},\widetilde{g}\otimes\widetilde{f}\right)$$

erfüllt ist. Nun wird $S:=\mathcal{F}\widetilde{S}\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n\times\mathbb{T}^n)'$ definiert sowie $\widehat{f}_c:=\mathcal{F}_c(f)\in S(\mathbb{Z}^n)$ und $\widehat{g}_c:=\mathcal{F}_c(g)\in S(\mathbb{Z}^n)$ für beliebige $f,g\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$. Es folgt wegen gleichen Umformungen wie in (10), dass $(Tf,g)=(S,g\otimes f)$ erfüllt ist. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ ist bijektiv, also ist die Abbildung S eindeutig bestimmt. □

8 Eigenschaften Γ-invarianter Abbildungen

In diesem Kapitel wird die Γ-Invarianz eines Operators definiert und es werden einige Beispiele Γ-invarianter Operatoren vorgestellt. Es wird gezeigt, dass sich unter der Voraussetzung der Γ-Invarianz einer Abbildung auf $S(\mathbb{Z}^n)$ Aussagen über ihre Stetigkeit allein über die Eigenschaften der Bilder der $(\delta_r)_{r\in R}$ treffen lassen.

Es sei $\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ eine Untergruppe mit endlichem Index und

$$\Gamma^\perp = \left\{ z \in \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n \; ; \; e^{i\langle z,\gamma\rangle} = 1 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \right\}$$

der Annihilator von Γ in $\widehat{\mathbb{Z}^n}$. Außerdem sei R ein Repräsentantensystem modulo Γ und $\widehat{R}$ ein Repräsentantensystem modulo $\Gamma^\perp$, das heißt es gilt

$$\mathbb{Z}^n = \dot{\bigcup_{r\in R}} r + \Gamma \quad \text{und} \quad \mathbb{T}^n = \dot{\bigcup_{x\in \widehat{R}}} x + \Gamma^\perp.$$

(8.1) Definition
Eine Abbildung A auf einem Folgenraum über $\mathbb{Z}^n$ heißt Γ-*invariant*, falls

$$[A, T_\gamma] := A \circ T_\gamma - T_\gamma \circ A = 0$$

für alle $\gamma \in \Gamma$ erfüllt ist. Sie wird $\mathbb{Z}^n$-*shiftinvariant* oder *vollständig shiftinvariant* genannt, wenn $[A, T_l] = 0$ für alle $l \in \mathbb{Z}^n$ gilt.

(8.2) Beispiele

a) Ist $l \in \mathbb{Z}^n$, so ist der Verschiebungsoperator

$$T_l : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), (T_l f)(k) = f(k-l), k \in \mathbb{Z}^n,$$

offensichtlich Γ-invariant.

b) Ist $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$, so ist der Faltungsoperator $C_g : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto f * g$, Γ-invariant. Nach Lemma 6.6 gilt $C_g f = g * f \in S'(\mathbb{Z}^n)$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$. Um die Γ-Invarianz zu zeigen, seien $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $\gamma \in \Gamma$ beliebig. Dann gilt nach Definition des Verschiebungsoperators auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ 6.4

$$\begin{aligned}
\left(T_\gamma\left(C_g f\right), h\right) &= \left(C_g f, T_{-\gamma} h\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(C_g f\right)(k)\left(T_{-\gamma} h\right)(k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} g(l)\, f(k-l)\, h(k+\gamma) = \sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} g(l)\, f(j-\gamma-l)\, h(j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^n}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n} g(l)\left(T_\gamma f\right)(j-l)\, h(j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} C_g\left(T_\gamma f\right)(j)\, h(j) \\
&= \left(C_g\left(T_\gamma f\right), h\right)
\end{aligned}$$

für alle $h \in S(\mathbb{Z}^n)$, also ist die Abbildung C_g Γ-invariant.

(8.3) Bemerkungen
Ist der lineare Operator $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), f \mapsto Af$, stetig und Γ-invariant, so ist wegen Lemma 3.6 a) und Lemma 4.7 auch die Abbildung $A' : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto Af$, linear, stetig und Γ-invariant, das heißt insbesondere

$$\mathcal{L}\left(l^2(\mathbb{Z}^n), l^2(\mathbb{Z}^n)\right) \subset \mathcal{L}\left(S(\mathbb{Z}^n), S'(\mathbb{Z}^n)\right)$$

und verdeutlicht noch einmal, warum in dieser Arbeit die allgemeineren Operatoren aus $\mathcal{L}\left(S(\mathbb{Z}^n), S'(\mathbb{Z}^n)\right)$ betrachtet werden.

(8.4) Satz
Für eine lineare und stetige $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ sind äquivalent:

(i) Die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S(\mathbb{Z}^n)$ ist stetig.

(ii) Es gilt $A\left(S(\mathbb{Z}^n)\right) \subset S(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Ist die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S(\mathbb{Z}^n)$ stetig, so gilt offensichtlich $A\left(S(\mathbb{Z}^n)\right) \subset S(\mathbb{Z}^n)$.

Sei nun $A\left(S(\mathbb{Z}^n)\right) \subset S(\mathbb{Z}^n)$. Um die Stetigkeit der Abbildung A zu zeigen, sei $(f_l)_{l\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen ein f konvergiert und für die die Folge $(Af_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ ebenso in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen ein g konvergiert. Der Raum der Schwartzfolgen ist nach Satz 3.5 ein Fréchet-Raum, also sind f und g Schwartzfolgen. Da $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ nach Voraussetzung stetig ist, konvergiert die Folge $(Af_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $S'(\mathbb{Z}^n)$ gegen $Af \in S'(\mathbb{Z}^n)$. Nach Lemma 4.7 konvergiert die Folge $(Af_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ebenso gegen g in $S'(\mathbb{Z}^n)$ und da $S'(\mathbb{Z}^n)$ ein Hausdorff-Raum ist, folgt $Af = g$. Nun folgt die Behauptung aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen A.6 und Bemerkung A.7. □

(8.5) Lemma
Gegeben sei eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$, dann wird A eindeutig durch die Bilder der $(\delta_r)_{r\in R}$ festgelegt. Es gilt

$$Af = \sum_{r\in R} \sum_{\gamma\in\Gamma} f(r+\gamma)\, T_\gamma A\delta_r$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Angenommen es gibt eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung

$$B : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n),$$

so dass $A\delta_r = B\delta_r$ für alle $r \in R$ erfüllt ist, so folgt für $k = r + \gamma \in \mathbb{Z}^n, r \in R, \gamma \in \Gamma$

$$A\delta_k = A\delta_{r+\gamma} = AT_\gamma\delta_r = T_\gamma A\delta_r = T_\gamma B\delta_r = BT_\gamma\delta_r = B\delta_k$$

und aus Korollar 3.9 folgt $A = B$.

Ist $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ beliebig, dann gilt nach Lemma 3.8

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\delta_k = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f\,(r+\gamma)\,\delta_{r+\gamma} = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f\,(r+\gamma)\,T_\gamma\delta_r$$

mit unbedingter Konvergenz in $S(\mathbb{Z}^n)$. Wegen der Γ-Invarianz und der Stetigkeit der linearen Abbildung A folgt mit Satz A.4

$$Af = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f\,(r+\gamma)\,AT_\gamma\delta_r = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f\,(r+\gamma)\,T_\gamma A\delta_r.$$

□

(8.6) Lemma
Für eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ sind äquivalent:

(i) Es gilt $A\left(S(\mathbb{Z}^n)\right) \subset S(\mathbb{Z}^n)$.

(ii) Es gilt $(A\delta_r)_{r\in R} \subset S(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Gilt $A\left(S(\mathbb{Z}^n)\right) \subset S(\mathbb{Z}^n)$, so ist insbesondere $(A\delta_r)_{r\in R} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt.

Nun gelte $(A\delta_r)_{r\in R} \subset S(\mathbb{Z}^n)$. Sei $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ beliebig. Nach Lemma 3.3 a) und Lemma 2.7 a) gibt es zu jedem $N, M \in \mathbb{N}$ Konstanten $C_N, C_{r,M} > 0$, so dass

$$|f(k)| \le C_N \left(1+|k|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \quad \text{und} \quad |(A\delta_r)(k)| \le C_{r,M}\left(1+|k|^2\right)^{-\frac{M}{2}}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist. Wählt man zu beliebigem $M \in \mathbb{N}$ stets $N > M+2$, so folgt mit Lemma 8.5 und Lemma 2.8

$$\begin{aligned}
|(Af)(k)| =& \left|\sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f\,(r+\gamma)\,(T_\gamma A\delta_r)(k)\right| \le \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} |f\,(r+\gamma)||(A\delta_r)(k-\gamma)| \\
\le& C_N \sum_{r\in R} C_{r,M} \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(1+|r+\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \left(1+|k-\gamma|^2\right)^{-\frac{M}{2}} \\
=& C_N \sum_{r\in R} C_{r,M} \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(1+|r+\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \left(1+|-r|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \left(1+|-r|^2\right)^{\frac{N}{2}} \\
&\cdot \left(1+|k-\gamma|^2\right)^{-\frac{M}{2}} \left(1+|\gamma|^2\right)^{-\frac{M}{2}} \left(1+|\gamma|^2\right)^{\frac{M}{2}} \\
\le& C_1 \sum_{r\in R} \widetilde{C}_{r,M} \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(1+|\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \left(1+|r|^2\right)^{\frac{N}{2}} \left(1+|k|^2\right)^{-\frac{M}{2}} \left(1+|\gamma|^2\right)^{\frac{M}{2}} \\
\le& C_2 \left(1+|k|^2\right)^{-\frac{M}{2}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(1+|\gamma|^2\right)^{\frac{M-N}{2}} \\
\le& C\,(1+|k|)^{-M},
\end{aligned}$$

für eine Konstante $C > 0$ und alle $k \in \mathbb{Z}^n$. Also ist Af eine Schwartzfolge. □

(8.7) Korollar
Für eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ sind äquivalent:

(i) Die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S(\mathbb{Z}^n)$ ist stetig.

(ii) Es gilt $(A\delta_r)_{r\in R} \subset S(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Ist die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S(\mathbb{Z}^n)$ stetig, so gilt insbesondere $(A\delta_r)_{r\in R} \subset S(\mathbb{Z}^n)$.

Es gelte nun $(A\delta_r)_{r\in R} \subset S(\mathbb{Z}^n)$. Nach Lemma 8.6 gilt dann bereits $A\left(S(\mathbb{Z}^n)\right) \subset S(\mathbb{Z}^n)$ und die Behauptung folgt schließlich aus Satz 8.4. □

(8.8) Satz
Sei $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ der Raum aller Folgen über $\mathbb{Z}^n$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ sei linear, stetig und Γ-invariant. Gilt $A\delta_r \in S'(\mathbb{Z}^n)$ für alle $r \in R$, so folgt $A \in \mathcal{L}(S(\mathbb{Z}^n), S'(\mathbb{Z}^n))$.

Beweis
Es wird $A_F := A|_{F(\mathbb{Z}^n)}$ definiert. Die Abbildung A_F ist linear und Γ-invariant und es gilt

$$A_F f = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(r+\gamma)\, T_\gamma A_F \delta_r = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(r+\gamma)\, T_\gamma g_r,$$

für alle $f \in F(\mathbb{Z}^n)$ mit $g_r := A_F\delta_r$. Nach Bemerkung 3.10 wird die Abbildung A_F eindeutig durch die unendliche Matrix $((A_F\delta_l)(k))_{(l,k)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} = ((A\delta_l)(k))_{(l,k)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n}$ festgelegt. Nun wird die Folge S über $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ durch $S(k,l) := (A_F\delta_l)(k)$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$ definiert und gezeigt, dass S in der Menge $S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ enthalten ist.

Es gilt $\delta_r \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $(g_r)_{r\in R} \in S'(\mathbb{Z}^n)$, das heißt nach Lemma 3.3 a) und Lemma 2.7 a) existiert zu jedem $N \in \mathbb{N}$ und jedem $M \in \mathbb{N}$ Konstanten $C_{N,r}, C_{M,r} > 0$, so dass

$$|\delta_r(l-\gamma)| \le C_{N,r}\left(1+|l-\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}} \qquad \text{und} \qquad |g_r(k-\gamma)| \le C_{M,r}\left(1+|k-\gamma|\right)^{\frac{M}{2}}$$

für alle $l \in \mathbb{Z}^n, \gamma \in \Gamma$ erfüllt ist. Sei $N > M+2$, dann folgt mit Lemma 2.7 a) und Lemma 2.8

$$\begin{aligned}
|S(k,l)| = |(A_F\delta_l)(k)| &= \left|\sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma}\delta_l(r+\gamma)\,(T_\gamma g_r)(k)\right| \le \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma}|\delta_r(l-\gamma)\, g_r(k-\gamma)| \\
&\le \sum_{r\in R} C_{N,r}C_{M,r}\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(1+|l-\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\left(1+|k-\gamma|^2\right)^{\frac{M}{2}} \\
&\le C_1\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(1+|l-\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\left(1+|-l|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\left(1+|-l|^2\right)^{\frac{N}{2}}\left(1+|k-\gamma|^2\right)^{\frac{M}{2}} \\
&\le C_2\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(1+|\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\left(1+|l|^2\right)^{\frac{N}{2}}\left(1+|k-\gamma|^2\right)^{\frac{M}{2}} \\
&\le C_3\sum_{\gamma\in\Gamma}\left(1+|\gamma|^2\right)^{-\frac{N}{2}}\left(1+|l|^2\right)^{\frac{N}{2}}\left(1+|k|^2\right)^{\frac{M}{2}}\left(1+|\gamma|^2\right)^{\frac{M}{2}}
\end{aligned}$$

$$= C_3 \left(1+|l|^2\right)^{\frac{N}{2}} \left(1+|k|^2\right)^{\frac{M}{2}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(1+|\gamma|^2\right)^{\frac{M-N}{2}}$$
$$\leq C_4 \left(1+|l|\right)^N \left(1+|k|\right)^M \leq C \left(1+|(k,l)|\right)^{2N}$$

für eine Konstante $C > 0$ und alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$, also gilt $S \in S'(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ nach Satz 4.5. Nach dem Satz vom Kern 7.4 existiert eine eindeutige, lineare und stetige Abbildung $\widetilde{A} : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$, so dass $\left(\widetilde{A}f, g\right) = (S, g \otimes f)$ für alle $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist. Das bedeutet aber insbesondere für $f = \delta_l$ und $g = \delta_k, k, l \in \mathbb{Z}^n$, dass

$$\begin{aligned}\left(\widetilde{A}\delta_l\right)(k) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widetilde{A}\delta_l(m)\,\delta_k(m) = \left(\widetilde{A}\delta_l, \delta_k\right) = (S, \delta_k \otimes \delta_l)\\ &= \sum_{(j,m)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n} S(j,m)\,\delta_k(j)\,\delta_l(m) = S(k,l)\\ &= (A_F\delta_l)(k) = (A\delta_l)(k)\end{aligned}$$

für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Die Abbildungen A und $\widetilde{A}$ stimmen also auf $(\delta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ überein und nach Lemma 4.8 ist die Abbildung $\widetilde{A} : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ stetig. Aus Korollar 3.9 folgt $A = \widetilde{A}$, also ist die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ stetig. □

Mit Hilfe des vorherigen Satzes kann die Stetigkeit des Faltungsoperators auf $S(\mathbb{Z}^n)$ gezeigt werden, wenn mit einer Folge aus $S'(\mathbb{Z}^n)$ gefaltet wird.

(8.9) Korollar
Sei $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $C_g : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto g * f$, der durch g induzierte Faltungsoperator, dann ist die Abbildung $C_g : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ stetig.

Beweis
Der Faltungsoperator ist nach Lemma 6.6 wohldefiniert; er ist linear und nach Beispiel 8.2 b) Γ-invariant. Um die Stetigkeit von $C_g : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ zu zeigen, sei $(f_l)_{l\in\mathbb{Z}^n} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ eine Nullfolge in $S(\mathbb{Z}^n)$ und $m \in \mathbb{Z}^n$ beliebig, aber fest. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz, vgl. Satz 4.5, folgt

$$\left(C_g f_l\right)(m) = (g * f_l)(m) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g(k)\, f_l(m-k) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0,$$

also ist die Abbildung $C_g : S(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n}$ stetig. Außerdem gilt $C_g\delta_r = g * \delta_r \in S'(\mathbb{Z}^n)$ für alle $r \in R$ nach Lemma 6.6 und mit Hilfe von Satz 8.8 folgt dann die Stetigkeit der Abbildung C_g. □

9 Darstellungen Γ-invarianter Abbildungen

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Darstellungen einer linearen, stetigen und Γ-invarianten Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen. Dies geschieht auf unterschiedliche Weisen, da je nach Anwendungsfall eine Variante einer anderen überlegen sein kann. Dann werden die verschiedenen Resultate miteinander verglichen und mit ihrer Hilfe wird schließlich im letzten Abschnitt des Kapitels eine Aussage über die $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Beschränktheit bestimmter Abbildungen getroffen.

Es sei $\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ eine Untergruppe mit endlichem Index und

$$\Gamma^\perp = \left\{ z \in \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n \ ; \ e^{i\langle z,\gamma\rangle} = 1 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \right\}$$

der Annihilator von Γ in $\widehat{\mathbb{Z}^n}$. Es sei R ein Repräsentantensystem modulo Γ. Nach [2, Proposition I.3.2] existiert ein Borel-messbares Repräsentantensystem modulo $\Gamma^\perp$, welches im Folgenden mit $\widehat{R}$ bezeichnet wird. Insgesamt gilt also

$$\mathbb{Z}^n = \dot{\bigcup_{r\in R}} r + \Gamma \quad \text{ und } \quad \mathbb{T}^n = \dot{\bigcup_{x\in \widehat{R}}} x + \Gamma^\perp.$$

9.1 Bestimmung einer Darstellung mit dem Satz vom Kern

Ähnlich wie in [5, Section 3] wird in diesem Abschnitt mit Hilfe des Satzes vom Kern 7.4 gezeigt, dass eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ die Darstellung

$$\widehat{Af} = \sum_{z\in\Gamma^\perp} w_z \cdot T_z \widehat{f}, \quad f \in S(\mathbb{Z}^n),$$

besitzt, wobei die $w_z \in C^\infty(\mathbb{T}^n)', z \in \Gamma^\perp$, eindeutig durch die Abbildung A festgelegt sind.

Um dies beweisen zu können, muss jedoch das folgende Lemma bewiesen werden, vgl. [5, Proposition 2.3]. Die Darstellung, die sich dabei aus Teil b) ergibt, wird dann schließlich auf den Schwartz-Kern der Abbildung A angewandt. Es wird erst einmal das besagte Lemma 9.1 formuliert, anschließend werden die für den Beweis des Lemmas noch fehlenden Aussagen gezeigt, dann folgt der Beweis.

(9.1) Lemma
Sei $\Gamma \subset \mathbb{Z}^m$ eine Untergruppe von endlichem Index.

a) Sei $m \leq n$ und sei $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ so, dass $g = T_{(\gamma,0)}g$ für alle $\gamma \in \Gamma$ erfüllt ist. Dann existieren eindeutige $w_z \in C^\infty(\mathbb{T}^{n-m})', z \in \Gamma^\perp$, so dass

$$\left(g, \overline{f}\right) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{R_z \widehat{f}}\right)$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist, wobei $R_z\widehat{f}\,(t) := \widehat{f}\,(z,t)\,, t \in \mathbb{T}^{n-m}, z \in \Gamma^{\perp}$, sei. Darüber hinaus ist die Abbildung $g \mapsto w_z$ für jedes $z \in \Gamma^{\perp}$ stetig.

b) Sei $n = 2m$ und sei $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ so, dass $g = T_{(\gamma,\gamma)}g$ für alle $\gamma \in \Gamma$ erfüllt ist. Dann existieren eindeutige $w_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^m)', z \in \Gamma^{\perp}$, so dass

$$\left(g, \overline{f}\right) = \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \left(w_z, \overline{Q_z\widehat{f}}\right)$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist, wobei $Q_z\widehat{f}\,(t) := \widehat{f}\,(t, z-t)\,, t \in \mathbb{T}^m, z \in \Gamma^{\perp}$, sei. Darüber hinaus ist die Abbildung $g \mapsto w_z$ für jedes $z \in \Gamma^{\perp}$ stetig.

Um Lemma 9.1 beweisen zu können, muss folgende Aussage bewiesen werden.

(9.2) Lemma
Ist $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so gilt

$$\left(\widehat{g}, \overline{\widehat{f}}\right) = \left(g, \overline{f}\right).$$

Beweis
Da die Reihe $\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{i\langle \xi, l\rangle} e^{-i\langle \xi, k\rangle}$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}^n$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ konvergiert und die Abbildung $\xi \mapsto f(l)\, e^{i\langle \xi, l-k\rangle}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}^n$ integrierbar ist, folgt mit Lemma 2.9

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{g}, \overline{\widehat{f}}\right) &= \left(g, \mathcal{F}_c\overline{\widehat{f}}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k) \left(\mathcal{F}_c\overline{\widehat{f}}\right)(k) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k)\, (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \overline{\widehat{f}}\,(\xi)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k)\, (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \overline{\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l)\, e^{-i\langle \xi, l\rangle}} e^{-i\langle \xi, k\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \overline{f(l)}\, (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{i\langle \xi, l-k\rangle} d\xi \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k)\, \overline{f(k)} = \left(g, \overline{f}\right). \qquad \square
\end{aligned}$$

Die nächsten Definitionen sowie einige elementare Aussagen über die im Folgenden definierte Funktion werden benötigt, um im Beweis von Lemma 9.1 den Teil b) aus Teil a) folgern zu können.

(9.3) Definition und Bemerkung
Es sei

$$\mathrm{GL}_n\,(\mathbb{Z}) := \left\{M \in \mathbb{Z}^{n \times n};\ \det M = \pm 1\right\}.$$

Für jede Matrix $M \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ sind äquivalent:

(i) Die Matrix besitzt ein ganzzahliges Inverses.

(ii) Es gilt $\det M = \pm 1$.

Dies lässt sich leicht mit Hilfe der Cramerschen Regel beweisen.

(9.4) Definition
Ist $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, so wird für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ die Abbildung

$$(D_M f)(k) := f\big(M^{-1}k\big), \quad k \in \mathbb{Z}^n,$$

definiert. Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ wird

$$(D_M g, f) := (g, D_{M^{-1}} f), \quad f \in S(\mathbb{Z}^n),$$

definiert.

(9.5) Bemerkung
Ist $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ und $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so ist $D_M f \in S(\mathbb{Z}^n)$. Ist f eine Schwartzfolge, so existiert nach Lemma 3.3 a) zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_N > 0$, so dass

$$|f(k)| \leq C_N (1 + |k|)^{-N}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist. Es folgt mit Lemma 2.7 a)

$$\begin{aligned}
|(D_M f)(k)| = |f\big(M^{-1}k\big)| &\leq C_N \Big(1 + |M^{-1}k|\Big)^{-N} \\
&\leq C_1 |M^{-1}k|^{-N} \leq C_1 \sqrt{\lambda}^{-N} |k|^{-N} \leq C (1 + |k|)^{-N},
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ und eine Konstante $C > 0$, wobei mit λ der größte Eigenwert der Matrix $(M^{-1})^* \cdot M^{-1}$ bezeichnet wird, vgl. Standardabschätzung mit der durch die euklidische Norm induzierten Spektralnorm.

(9.6) Lemma
Ist $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, so gelten die folgenden Aussagen:

a) Ist $l \in \mathbb{Z}^n$, so gilt $T_l D_{M^{-1}} g = D_{M^{-1}} T_{Ml} g$ für alle $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$.

b) Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt $(D_{M^{-1}} f)\widehat{\ } = D_{M^T} \widehat{f}$.

Beweis
a) Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n), f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $l \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
(T_l D_{M^{-1}} g, f) &= (D_{M^{-1}} g, T_{-l} f) = (g, D_M T_{-l} f) \\
&= \Big(g, (T_{-l} f)\Big(M^{-1}\cdot\Big)\Big) = \Big(g, f\Big(M^{-1}(\cdot + Ml)\Big)\Big) \\
&= (g, D_M f(\cdot + Ml)) = (g, T_{-Ml} D_M f) \\
&= (T_{Ml} g, D_M f) = (D_{M^{-1}} T_{Ml} g, f),
\end{aligned}$$

also $T_l D_{M^{-1}} g = D_{M^{-1}} T_{Ml} g$ für alle $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$.

b) Sei $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, dann gilt $D_{M^{-1}} f \in S(\mathbb{Z}^n)$ nach Bemerkung 9.5 und es folgt

$$\begin{aligned}(D_{M^{-1}} f)^{\widehat{}}\,(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (D_{M^{-1}} f)(k)\, e^{-i\langle \xi,k\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(Mk)\, e^{-i\langle \xi,k\rangle} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\left\langle \xi, M^{-1}k\right\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\, e^{-i\left\langle \left(M^{-1}\right)^T \xi,k\right\rangle} \\ &= \widehat{f}\left(\left(M^T\right)^{-1} \xi\right) = D_{M^T} \widehat{f}\,(\xi)\end{aligned}$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$. □

Beweis von Lemma 9.1

a) Da der Beweis sehr lang ist, wird nun kurz das Vorgehen erklärt. Zu Beginn wird eine Hilfsfunktion Φ in Abhängigkeit von $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und einer anderen Funktion definiert, so dass $(g, \Phi) = (g, f)$ erfüllt ist. Es wird die Wohldefiniertheit von Φ überprüft und gezeigt, dass $\Phi \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt. Anschließend wird die Abbildung Φ in einer Koordinate fixiert und die Abbildung $\Phi_l = \Phi(\cdot, l)\,, l \in \mathbb{Z}^{n-m}$, betrachtet; von dieser wird die Fouriertransformation bestimmt, welche Rückschlüsse auf die Fouriertransformierte von Φ zulässt. Um die Darstellung von g zu erhalten, wird dann die Beziehung $(g, \Phi) = (g, f)$ und Lemma 9.2 verwendet. Abschließend wird Eindeutigkeit der $w_z, z \in \Gamma^\perp$, und die Stetigkeit der Abbildung $g \mapsto w_z, z \in \Gamma^\perp$, gezeigt.

Sei $\psi \in S(\mathbb{Z}^m)$ so, dass $\sum_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma \psi = 1$ gilt. Dies ist wegen Korollar 5.16 äquivalent zu

$$\widehat{\psi}\,(z) = \begin{cases} |\Gamma^\perp|, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{falls } z \in \Gamma^\perp \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{n-m})$ wird das Funktional $w_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{n-m})'$ durch

$$(w_z, \varphi) := |\Gamma^\perp|^{-1} \left(\widehat{g}, \left(T_z \overline{\widehat{\psi}}\,\right) \otimes \varphi\right)$$

definiert.

Die Hilfsfunktion Φ: Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ wird eine Hilfsfunktion

$$\Phi\,(k, l) := \psi(k) \sum_{\gamma\in\Gamma} f(k-\gamma, l)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^m$und $l \in \mathbb{Z}^{n-m}$ definiert.

Wohldefiniertheit: Da $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt, existiert zu jedem $L \in \mathbb{N}, L > 1$, eine Konstante $C_L > 0$, so dass

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |f\,(k-\gamma, l)| \le \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^m} |f(k-\gamma, l)| \le C_L \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^m} (1 + |(k-\gamma, l)|)^{-L} < \infty,$$

erfüllt ist. Das heißt die Reihe $\sum_{\gamma\in\Gamma} f(k-\gamma,l)$ konvergiert gleichmäßig in k und l, also ist die Abbildung Φ wohldefiniert.

$\Phi \overset{!}{\in} S(\mathbb{Z}^n)$: Für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ seien $L, M \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass

$$K := \min(L, M) > N+1$$

gelte. Da $\psi \in S(\mathbb{Z}^m)$ gilt, folgt aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz in k und l mit Hilfe von Lemma 2.8

$$\begin{aligned}
\left|\Phi(k,l)\,(1+|(k,l)|)^N\right| &\le \sum_{\gamma\in\Gamma} |\psi(k)||f(k-\gamma,l)|\,(1+|(k,l)|)^N \\
&\le C_L \sum_{\gamma\in\Gamma} |\psi(k)|\,(1+|(k-\gamma,l)|)^{-L}\,(1+|(k,l)|)^N \\
&\le C_1 \sum_{\gamma\in\Gamma} (1+|k|)^{-M}\,(1+|(k-\gamma,l)|)^{-L}\,(1+|(k,l)|)^N \\
&= C_1 \sum_{\gamma\in\Gamma} (1+|(k,0)|)^{-M}\,(1+|(k-\gamma,l)|)^{-L}\,(1+|(k,l)|)^N \\
&\le C_2 \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(1+|(k,0)|^2\right)^{-\frac{K}{2}}\left(1+|(k-\gamma,l)|^2\right)^{-\frac{K}{2}}(1+|(k,l)|)^N \\
&\le C_3 \sum_{\gamma\in\Gamma} \left(1+|(2k-\gamma,l)|^2\right)^{-\frac{K}{2}}(1+|(k,l)|)^N \\
&\le C_4 \sum_{\gamma\in\Gamma} \underbrace{(1+|(2k-\gamma,l)|)^{-K}\,(1+|(k,l)|)^N}_{\xrightarrow[|(k,l)|\to\infty]{}0} \xrightarrow[|(k,l)|\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

also ist Φ ein Element von $S(\mathbb{Z}^n)$.

$(\mathbf{g}, \mathbf{\Phi}) = (\mathbf{g}, \mathbf{f})$**:** Wegen $g = T_{(\gamma,0)}g$, der Linearität von g und der Konstruktion von ψ folgt

$$\begin{aligned}
(g,f) &= \left(g, \sum_{\gamma\in\Gamma} T_{(\gamma,0)}(\psi\otimes 1)\cdot f\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\left(g, T_{(\gamma,0)}(\psi\otimes 1)\cdot f\right) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\left(g, T_{(\gamma,0)}\left[(\psi\otimes 1)\cdot T_{(-\gamma,0)}f\right]\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\left(g, (\psi\otimes 1)\cdot T_{(-\gamma,0)}f\right) \\
&= (g,\Phi).
\end{aligned}$$

Definition der Hilfsfunktion $\mathbf{\Phi_l}$: Nun werden für $l \in \mathbb{Z}^{n-m}$ die Hilfsfunktionen $f_l(k) := f(k,l)$ und

$$\Phi_l(k) := \psi(k) \sum_{\gamma\in\Gamma} f_l(k-\gamma)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^m$ definiert. Es gilt

$$|f_l|_N = \max_{k\in\mathbb{Z}^m}\left\{(1+|k|)^N|f_l(k)|\right\} \le \max_{\substack{k\in\mathbb{Z}^m\\ l\in\mathbb{Z}^{n-m}}}\left\{(1+|(k,l)|)^N|f(k,l)|\right\} = |f|_N,$$

also ist f_l ein Element von $S(\mathbb{Z}^m)$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|f_l(k)| \leq C\,(1+|k|)^{-N}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ erfüllt ist. Damit folgt

$$\begin{aligned}|\Phi_l(k)| &= \Big|\psi(k) \sum_{\gamma\in\Gamma} f_l(k-\gamma)\,\Big| \leq |\psi(k)| \sum_{\gamma\in\Gamma} |f_l(k-\gamma)| \\ &\leq c\,(1+|k|)^{-M} \sum_{\gamma\in\Gamma} (1+|k-\gamma|)^{-N} \leq \widetilde{C}\,(1+|k|)^{-M}\end{aligned}$$

für eine Konstante $\widetilde{C} > 0$ und alle $M \in \mathbb{N}$, also gilt $\Phi_l \in S(\mathbb{Z}^m)$.

Fouriertransformierte von Φ_l: Nach Korollar 5.16 gilt

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} (T_\gamma f_l)(k) = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{f_l}\,(z)\,e^{i\langle z,k\rangle}$$

und damit folgt für $s \in \mathbb{T}^m$ und $l \in \mathbb{Z}^{n-m}$

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi_l}\,(s) &= \left(\psi \sum_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma f_l\right)^{\widehat{}}\,(s) = |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\psi \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{f_l}\,(z)\,e^{i\langle z,\cdot\rangle}\right)^{\widehat{}}\,(s) \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} \psi(j) \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{f_l}\,(z)\,e^{i\langle z,j\rangle} e^{-i\langle s,j\rangle} \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} \psi(j) \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{f_l}\,(z)\,e^{-i\langle s-z,j\rangle} \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{f_l}\,(z) \sum_{j\in\mathbb{Z}^m} \psi(j)\,e^{-i\langle s-z,j\rangle} \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{\psi}\,(s-z)\,\widehat{f_l}\,(z)\,.\end{aligned}$$

Fouriertransformierte von Φ: Da für $z \in \Gamma^\perp$ und $t \in \mathbb{T}^{n-m}$

$$\begin{aligned}\widehat{f}\,(z,t) &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^m\\ l\in\mathbb{Z}^{n-m}}} f(k,l)\,e^{-i\langle z,k\rangle} e^{-i\langle t,l\rangle} = \sum_{l\in\mathbb{Z}^{n-m}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} f_l(k)\,e^{-i\langle z,k\rangle} e^{-i\langle t,l\rangle} \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^{n-m}} \widehat{f_l}\,(z)\,e^{-i\langle t,l\rangle}\end{aligned}$$

erfüllt ist, folgt für $s \in \mathbb{T}^m$ und $t \in \mathbb{T}^{n-m}$

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}\,(s,t) &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^m\\ l\in\mathbb{Z}^{n-m}}} \Phi\,(k,l)\,e^{-i\langle (k,l),(s,t)\rangle} = \sum_{l\in\mathbb{Z}^{n-m}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \Phi_l(k)\,e^{-i\langle s,k\rangle} e^{-i\langle t,l\rangle} \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}^{n-m}} \widehat{\Phi_l}\,(s)\,e^{-i\langle t,l\rangle} = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{l\in\mathbb{Z}^{n-m}} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{\psi}\,(s-z)\,\widehat{f_l}\,(z)\,e^{-i\langle t,l\rangle} \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{\psi}\,(s-z) \sum_{l\in\mathbb{Z}^{n-m}} \widehat{f_l}\,(z)\,e^{-i\langle t,l\rangle}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \widehat{\psi}\,(s-z)\,\widehat{f}\,(z,t) \\
&= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(T_z\widehat{\psi} \otimes R_z\widehat{f}\right)(s,t)\,,
\end{aligned}
$$

wobei $R_z\widehat{f}\,(t) := \widehat{f}\,(z,t)\,, t \in \mathbb{T}^{n-m}$, gelte.

Darstellung von g: Wegen der Linearität von g und der Definition der $w_z, z \in \Gamma^{\perp}$, folgt

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{g}, \overline{\widehat{\Phi}}\right) &= |\Gamma^{\perp}|^{-1}\left(\widehat{g}, \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \overline{T_z\widehat{\psi} \otimes R_z\widehat{f}}\right) = |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(\widehat{g}, \overline{T_z\widehat{\psi} \otimes R_z\widehat{f}}\right) \\
&= \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} |\Gamma^{\perp}|^{-1} \left(\widehat{g}, T_z\overline{\widehat{\psi}} \otimes \overline{R_z\widehat{f}}\right) = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(w_z, \overline{R_z\widehat{f}}\right)
\end{aligned}
$$

und somit mit Lemma 9.2 schließlich

$$
\left(g, \overline{f}\right) = (g, \overline{\Phi}) = \left(\widehat{g}, \overline{\widehat{\Phi}}\right) = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(w_z, \overline{R_z\widehat{f}}\right).
$$

Eindeutigkeit der $\mathbf{w_z}, \mathbf{z} \in \Gamma^{\perp}$: Um die Eindeutigkeit der $w_z \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{n-m})'$, $z \in \Gamma^{\perp}$, zu zeigen, ist zu beachten, dass für $z \in \Gamma^{\perp}, f_1 \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{m})$ und $f_2 \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{n-m})$ nach Definition des Tensorproduktes 7.1 c) und Beispiel 4.14 a)

$$
\begin{aligned}
(\delta_z \otimes w_z, f_1 \otimes f_2) &= (\delta_z, f_1) \cdot (w_z, f_2) = f_1\,(z)\,(w_z, f_2) \\
&= (w_z, f_1\,(z)\, f_2) = (w_z, (f_1 \otimes f_2)\,(z,\cdot))
\end{aligned}
$$

gilt. Angenommen es gibt nun $w_z \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{n-m})'$ und $w'_z \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{n-m})', z \in \Gamma^{\perp}$, so dass

$$
\sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(w_z, \overline{\widehat{f}}\,(z,\cdot)\right) = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(w_z, \overline{R_z\widehat{f}}\right) = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(w'_z, \overline{R_z\widehat{f}}\right) = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \left(w'_z, \overline{\widehat{f}}\,(z,\cdot)\right)
$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt. Dann folgt

$$
\sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \delta_z \otimes w_z = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} \delta_z \otimes w'_z,
$$

das heißt für alle $f_1 \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{m})$ und alle $f_2 \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{n-m})$ gilt

$$
\sum_{z\in\Gamma^{\perp}} (\delta_z \otimes w_z)\,(f_1 \otimes f_2) = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} f_1\,(z)\,(w_z, f_2) = \sum_{z\in\Gamma^{\perp}} f_1\,(z)\left(w'_z, f_2\right).
$$

Für jedes $z \in \Gamma^{\perp}$ wird nun ein $f_1 \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{T}^{m})$ so gewählt, dass

$$
f_1\,(w) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w = z, \\ 0, & \text{falls } w \in \Gamma^{\perp} \setminus \{z\}. \end{cases}
$$

Dann folgt $(w_z, f_2) = (w'_z, f_2)$ für alle $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{n-m})$, das heißt es gilt $w_z = w'_z$.

Stetigkeit der Abbildung $\mathbf{g} \mapsto \mathbf{w_z}, \mathbf{z} \in \Gamma^\perp$: Sei nun $z \in \Gamma^\perp$ beliebig, aber fest gewählt. Die Abbildung $\mathcal{F} : S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)', g \mapsto \widehat{g}$, ist nach Satz 5.33 stetig und nach Bemerkung 4.12 c) ist die Abbildung $S_f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)' \to \mathbb{C}, \widehat{g} \to (\widehat{g}, f)$, für jedes $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ stetig. Die Abbildung

$$S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)', g \mapsto w_z = |\Gamma^\perp|^{-1} \left(\widehat{g}, \left(T_z \overline{\widehat{\psi}}\right) \otimes \cdot\right)$$

ist nach Definition A.1 genau dann stetig, wenn für alle $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^{n-m})$ die Abbildungen

$$T_\varphi : S'(\mathbb{Z}^n) \to \mathbb{C}, g \mapsto w_z = |\Gamma^\perp|^{-1} \left(\widehat{g}, \left(T_z \overline{\widehat{\psi}}\right) \otimes \varphi\right)$$

stetig sind. Es gilt $T_\varphi = S_f \circ \mathcal{F}$ mit $f := \left(T_z \overline{\widehat{\psi}}\right) \otimes \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, also ist T_φ nach den obigen Überlegungen dieses Absatzes stetig.

b) Ziel ist es, mit Hilfe einer Koordinatentransformation die Voraussetzungen für Teil a) des Lemmas zu schaffen, dann diesen bereits bewiesen Teil des Lemmas anzuwenden und schließlich eine Rücktransformation durchzuführen. Dafür werden die Räume $H_1 := (\Gamma, 0) \subset \mathbb{Z}^n$ und $H_2 := (\Gamma, \Gamma) \subset \mathbb{Z}^n$ definiert; mit $M := \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & \underline{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ gilt $H_2 = MH_1$, wenn Id die $m \times m$-Einheitsmatrix und $\underline{0}$ die $m \times m$-Nullmatrix bezeichnet. Jetzt wird ein Hilfsfunktional definiert, das die Voraussetzungen aus Teil a) des Lemmas erfüllt. Sei $g_1 := D_{M^{-1}} g$, dann folgt mit Lemma 9.6 a) für alle $\gamma \in \Gamma$

$$\begin{aligned} T_{(\gamma,0)} g_1 &= T_{(\gamma,0)} D_{M^{-1}} g = D_{M^{-1}} T_{M(\gamma,0)} g \\ &= D_{M^{-1}} T_{(\gamma,\gamma)} g = D_{M^{-1}} g = g_1. \end{aligned}$$

Wird für $z \in \Gamma^\perp$ und $t \in \mathbb{T}^m$

$$\begin{aligned} Q_z \widehat{f}(t) &:= \left(R_z D_{M^t} \widehat{f}\right)(t) = D_{M^t} \widehat{f}(z, t) \\ &= \widehat{f}\left(\begin{pmatrix} \underline{0} & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & -\mathrm{Id} \end{pmatrix} (z, t)^T\right) = \widehat{f}(t, z - t) \end{aligned}$$

definiert, so folgt wegen Lemma 9.6 b) und Teil a) des Lemmas, dass

$$\begin{aligned} \left(g, \overline{f}\right) &= \left(D_M g_1, \overline{f}\right) = \left(g_1, \overline{D_{M^{-1}} f}\right) \\ &= \sum_{z \in \Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{R_z \left(D_{M^{-1}} f\right)^\wedge}\right) = \sum_{z \in \Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{R_z D_{M^T} \widehat{f}}\right) \\ &= \sum_{z \in \Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{Q_z \widehat{f}}\right) \end{aligned}$$

erfüllt ist. Es ist zu beachten, dass die Funktionale $w_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^m), z \in \Gamma^\perp$, nicht über das Funktional g definiert werden, sondern über das Funktional $g_1 = D_{M^{-1}} g$. Die Eindeutigkeit der $w_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^m)', z \in \Gamma^\perp$, und die Stetigkeit der Abbildungen $g \mapsto w_z$ für $z \in \Gamma^\perp$ folgen aus Teil a), da die Abbildung $g \mapsto D_{M^{-1}} g$ topologisch ist. □

Nach dem Beweis des Lemmas 9.1 ist es nicht mehr schwer, die gewünschte Darstellung für eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung von $S(\mathbb{Z}^n)$ nach $S'(\mathbb{Z}^n)$ mit Hilfe des Satzes vom Kern auf $S(\mathbb{Z}^n)$ 7.4 zu zeigen.

(9.7) Satz
Ist $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung, so existieren eindeutig bestimmte $w_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)', z \in \Gamma^\perp$, so dass

$$\widehat{Af} = \sum_{z\in\Gamma^\perp} w_z \cdot T_z\widehat{f}$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ erfüllt ist.

Beweis
Sei $\kappa \in S(\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n)$ der Schwartz-Kern von A, das heißt es gilt $(Af, g) = (\kappa, g \otimes f)$ für $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$. Um Lemma 9.1 b) auf den Schwartz-Kern κ anwenden zu können, muss zunächst $\kappa = T_{(\gamma,\gamma)}\kappa$ für alle $\gamma \in \Gamma$ gezeigt werden. Sei also $\gamma \in \Gamma$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}(\kappa, g \otimes f) &= (Af, g) = (T_\gamma T_{-\gamma} Af, g) = (T_\gamma A T_{-\gamma} f, g)\\ &= (AT_{-\gamma} f, T_{-\gamma} g) = (\kappa, T_{-\gamma} g \otimes T_{-\gamma} f)\\ &= \left(\kappa, T_{(-\gamma,-\gamma)}\,(g \otimes f)\right) = \left(T_{(\gamma,\gamma)}\kappa, g \otimes f\right).\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des Schwartz-Kerns folgt $\kappa = T_{(\gamma,\gamma)}\kappa$ für alle $\gamma \in \Gamma$.

Nun wird die Darstellung bewiesen. Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt nach Lemma 5.21 f)

$$\overline{\widehat{f}}\,(\xi) = \widehat{\overline{f}}\,(-\xi)\,.$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$. Damit folgt für $f, g \in S(\mathbb{Z}^n)$ mit Hilfe von Lemma 7.3 a), Lemma 9.2 und Lemma 9.1 b)

$$\begin{aligned}\left(\widehat{Af}, \overline{\widehat{g}}\right) &= (Af, \overline{g}) = (\kappa, \overline{g} \otimes f) = \left(\kappa, \overline{g \otimes \overline{f}}\right)\\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{Q_z\left(g \otimes \overline{f}\right)^{\wedge}}\right) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{Q_z\left(\widehat{g} \otimes \widehat{\overline{f}}\right)}\right)\\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z, Q_z\left(\overline{\widehat{g}} \otimes \overline{\widehat{\overline{f}}}\right)\right) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{\widehat{g}}\,(\cdot) \cdot \overline{\widehat{\overline{f}}}\,(z - \cdot)\right)\\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{\widehat{g}}\,(\cdot) \cdot \widehat{f}\,(\cdot - z)\right) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z, \overline{\widehat{g}} \cdot T_z\widehat{f}\right)\\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(w_z \cdot T_z\widehat{f}, \overline{\widehat{g}}\right),\end{aligned}$$

also gilt

$$\widehat{Af} = \sum_{z\in\Gamma^\perp} w_z \cdot T_z\widehat{f}.$$

□

Die Eindeutigkeit der $w_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)', z \in \Gamma^\perp$, folgt aus Lemma 9.1 b).

Die Funktionale $w_z \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)', z \in \Gamma^\perp$, lassen sich sogar explizit angeben, wie die folgende Bemerkung zeigt.

(9.8) Bemerkung
Unter den Voraussetzungen von Satz 9.7 können die Funktionale $w_z, z \in \Gamma^\perp$, explizit angebeben werden. Es gilt

$$(w_z, \varphi) = |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\widehat{D_{M^{-1}}\kappa}, \left(T_z \sum_{r\in R} e^{i\langle \cdot, r\rangle}\right) \otimes \varphi\right)$$

für $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$, wenn mit κ der Schwartz-Kern von A bezeichnet wird und $M := \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & \underline{0} \end{pmatrix}$ wie im Beweis von 9.1 b) gilt. Es folgt mit Lemma 7.3 b) und Definition 9.4

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{Af}, h\right) &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(\widehat{D_{M^{-1}}\kappa}, \left(T_z \sum_{r\in R} e^{i\langle \cdot, r\rangle}\right) \otimes \left(T_z \widehat{f} \cdot h\right)\right) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(D_{M^{-1}}\kappa, \mathcal{F}_c\left(T_z \sum_{r\in R} e^{i\langle \cdot, r\rangle}\right) \otimes \mathcal{F}_c\left(T_z \widehat{f} \cdot h\right)\right) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(\kappa, D_M\left[\mathcal{F}_c\left(T_z \sum_{r\in R} e^{i\langle \cdot, r\rangle}\right) \otimes \mathcal{F}_c\left(T_z \widehat{f} \cdot h\right)\right]\right)
\end{aligned}$$

Begründung: Wird $\psi \in S(\mathbb{Z}^n)$ durch $\psi(k) := \sum_{r\in R} \delta_r(k)$ definiert und beachtet, dass jedes $k_0 \in \mathbb{Z}^n$ eine eindeutige Darstellung $k_0 = r_0 + \gamma_0, r_0 \in R, \gamma_0 \in \Gamma$ besitzt, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma} T_\gamma \psi(k_0) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \psi(k_0 - \gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{r\in R} \delta_r(k_0 - \gamma) \\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{r\in R} \delta_r(r_0 + \gamma_0 - \gamma) \\
&= \sum_{\gamma'\in\Gamma}\sum_{r\in R} \delta_r(r_0 + \gamma') = \sum_{r\in R} \delta_r(r_0) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

also erfüllt ψ die Voraussetzungen im Beweis von Lemma 9.1 a). Es gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(k)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{r\in R} \delta_r(k)\, e^{-i\langle \xi, k\rangle} \\
&= \sum_{r\in R} e^{-i\langle \xi, r\rangle} = \sum_{r\in R} \widehat{\delta_r}(\xi).
\end{aligned}$$

Ist κ der Schwartz-Kern der Abbildung A, dann gilt $T_{(\gamma,\gamma)}\kappa = \kappa$ für alle $\gamma \in \Gamma$, vgl. den Beweis von 9.7. Es ist zu beachten, dass im Beweis von 9.1 b) die $w_z, z \in \Gamma^\perp$, durch $\kappa_1 := D_{M^{-1}}\kappa$ festgelegt werden, also folgt

$$\begin{aligned}
(w_z, \varphi) &= |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\widehat{\kappa_1}, \left(T_z \overline{\widehat{\psi}}\right) \otimes \varphi\right) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\widehat{D_{M^{-1}}\kappa}, \left(T_z \sum_{r\in R} e^{i\langle \cdot, r\rangle}\right) \otimes \varphi\right).
\end{aligned}$$

9.2 Bestimmung einer Darstellung über die $(\delta_r)_{r\in R}$

Eine Darstellung eines linearen, stetigen und Γ-invarianten Operators

$$A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$$

kann auch mit Hilfe der $(A\delta_r)_{r\in R}$ angegeben werden. Im Vergleich zur Bestimmung der Darstellung über die $w_z, z \in \Gamma^\perp$, in Abschnitt 9.1 ist diese Herleitung sehr intuitiv; es wird lediglich über die disjunkte Zerlegung von $\mathbb{Z}^n$ in Γ-Nebenklassen argumentiert.

(9.9) Satz
Ist $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung, so gilt

$$\widehat{Af} = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \sum_{r\in R} \widehat{A\delta_r} \cdot T_z e^{i\langle\cdot,r\rangle} \cdot T_z \widehat{f}$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis
Wird $g_r := A\delta_r$ für $r \in R$ definiert, so folgt mit Lemma 5.21, der Poissonschen Summenformel 5.15 sowie Lemma 8.5 für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{Af}, h\right) &= (Af, \mathcal{F}_c h) = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(r+\gamma)\,(T_\gamma g_r, \mathcal{F}_c h) = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(r+\gamma)\,(g_r, T_{-\gamma}\mathcal{F}_c h) \\
&= (2\pi)^{-n} \sum_{r\in R}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\sum_{\gamma\in\Gamma} g_r(k) \int_{\mathbb{T}^n} f(r+\gamma)\, h(\xi) e^{-i\langle\xi,k+\gamma\rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \sum_{r\in R}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_r(k) \int_{\mathbb{T}^n} \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} (T_{-r}f)(\gamma)\, e^{-i\langle\xi,\gamma\rangle}\right) h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_r(k) \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left((T_{-r}f)\cdot e^{-i\langle\xi,\cdot\rangle}\right)^\wedge (z)\, h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_r(k) \int_{\mathbb{T}^n} (T_{-r}f)^\wedge (z+\xi)\, h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_r(k) \int_{\mathbb{T}^n} \widehat{f}(z+\xi)\, e^{i\langle z+\xi,r\rangle} h(\xi)\, e^{-i\langle\xi,k\rangle} d\xi \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} g_r(k)\, \mathcal{F}_c\left(T_{-z}\widehat{f}\cdot T_{-z}e^{i\langle\cdot,r\rangle}\cdot h\right)(k) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R}\sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(g_r, \mathcal{F}_c\left(T_{-z}\widehat{f}\cdot T_{-z}e^{i\langle\cdot,r\rangle}\cdot h\right)\right) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R}\sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(\widehat{g}_r, T_z\widehat{f}\cdot T_z e^{i\langle\cdot,r\rangle}\cdot h\right) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R}\sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(\widehat{g}_r\cdot T_z\widehat{f}\cdot T_z e^{i\langle\cdot,r\rangle}, h\right)
\end{aligned}$$

$$= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \left(\widehat{A\delta_r} \cdot T_z e^{i\langle\cdot,r\rangle} \cdot T_z \widehat{f}, h \right).$$

Dabei können die Reihe und das Integral miteinander vertauscht werden, da die Reihe

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} f\,(r+\gamma)\,h(\xi)e^{-i\langle\xi,k+\gamma\rangle}$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ absolut gleichmäßig auf $\mathbb{T}^n$ konvergiert und die Funktion

$$\xi \mapsto f\,(r+\gamma)\,h(\xi)e^{-i\langle\xi,k+\gamma\rangle}$$

für jedes $k \in \mathbb{Z}^n$ integrierbar ist. □

9.3 Bestimmung einer Darstellung mit Hilfe eines Matrixkalküls

In diesem Abschnitt wird für eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung

$$A : l^2\,(\mathbb{Z}^n) \to l^2\,(\mathbb{Z}^n)$$

eine Darstellung als Matrix-Vektor-Produkt auf der Fourierseite angegeben, vgl. [1]. Dafür wird zuerst erklärt, wie die Fouriertransformierte einer Folge als vektorwertige Funktion aufgefasst werden kann. Dabei macht man sich die disjunkte Zerlegung von $\mathbb{T}^n$ zunutze und es wird ein neuer Funktionenraum auf $\widehat{R}$ betrachtet. Das in diesem Abschnitt vorgestellte Matrixkalkül wird sich im nachfolgenden Kapitel als sehr nützlich erweisen.

Um einige Ausdrücke im weiteren Verlauf übersichtlicher schreiben zu können, wird das Tensorprodukt zweier Vektoren definiert. Da eine Verwechslung mit dem Tensorprodukt aus Kapitel 7 ausgeschlossen ist, wird es mit dem gleichen Zeichen $\otimes$ bezeichnet. Alleridngs ist zu beachten, dass das hier definierte Tensorprodukt sesquilinear ist.

(9.10) Definition (Tensorprodukt auf $\mathbb{C}^n$)
Für $u, v \in \mathbb{C}^n$ wird das *Tensorprodukt* $u \otimes v$ von u und v durch

$$(u \otimes v)\,(w) := \langle w, v\rangle_{\mathbb{C}^n}\, u$$

definiert. Die zugehörige Matrix ist gegeben durch

$$u \cdot \overline{v}^T = \begin{pmatrix} u_1\overline{v_1} & \dots & u_1\overline{v_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n\overline{v_1} & \dots & u_n\overline{v_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Das Tensorprodukt erfüllt die folgenden Eigenschaften:

(9.11) Lemma
Für $S, T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $u, v \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$S \circ (u \otimes v) \circ T = (Su) \otimes (T^* v)\,.$$

Für $u, v, s, t \in \mathbb{C}^n$ folgt daraus direkt

$$(u \otimes v) \circ (s \otimes t) = \langle s, v\rangle_{\mathbb{C}^n}\, u \otimes t.$$

Außerdem gilt

$$(u \otimes v)^* = v \otimes u \quad \text{ und } \quad (\alpha u \otimes \beta v) = \alpha\overline{\beta}\,(u \otimes v)$$

für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Beweis
Sei $w \in \mathbb{C}^n$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned}((Su) \otimes (T^* v))\,(w) &= Su \cdot \overline{T^* v}^T \cdot w = Su\overline{v}^T\overline{T^*}^T w = Su\overline{v}^T T^{**} w = Su\overline{v}^T T w \\ &= (S \circ (u \otimes v) \circ T)\,(w)\,.\end{aligned}$$

Sind $u, v, s, t \in \mathbb{C}^n$ und setzt man $S = u\overline{v}^T$ und $T = \mathrm{Id}$, so folgt

$$(u \otimes v) \circ (s \otimes t) = u\overline{v}^T \circ (s \otimes t) \circ \mathrm{Id} = \left(u\overline{v}^T \cdot s\right) \otimes (\mathrm{Id}\, t) = \langle s, v\rangle_{\mathbb{C}^n}\, u \otimes t$$

Zudem gilt

$$(u \otimes v)^* = \left(u\overline{v}^T\right)^* = \overline{\left(u\overline{v}^T\right)}^T = \left(\overline{u}v^T\right)^T = v\overline{u}^T = v \otimes u$$

und für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$(\alpha u \otimes \beta v) = (\alpha u) \cdot \overline{(\beta v)}^T = \alpha\overline{\beta}u\overline{v}^T = \alpha\overline{\beta}\,(u \otimes v)\,. \qquad \square$$

Nun wird, wie angekündigt, ein neuer Funktionenraum auf $\widehat{R}$ definiert.

(9.12) Definition
Für eine messbare Funktion $h : \widehat{R} \to \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ sei

$$\|h\|^p_{L^p(\widehat{R})} := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \|h(x)\|^p_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\, dx$$

mit der euklidischen Norm $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}$ auf $\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$. Dann wird der Funktionenraum $L^p\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$ wird wie folgt definiert:

$$L^p\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big) := L^p\left(\widehat{R}\right) := \left\{ h : \widehat{R} \to \mathbb{C}^{\Gamma^\perp} \text{ messbar };\ \|h\|_{L^p(\widehat{R})} < \infty \right\}.$$

Mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\widehat{R})} := (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\, dx$$

wird $L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$ zu einem Hilbertraum.

(9.13) Definition (Modulationsvektor)
Ist $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $\xi \in \mathbb{T}^n$, so wird $f_\Gamma(\xi) := (f(\xi + w))_{w \in \Gamma^\perp} \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ definiert. Ist $x \in \widehat{R}$, so wird $f_\Gamma(x)$ *Modulationsvektor* genannt, vgl. [1].

Der Zusammenhang, der zwischen den Räumen $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ und $L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$ besteht, wird im folgenden Lemma gezeigt.

(9.14) Lemma
Die Abbildung

$$T : L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) \to L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big),\ (Tf)(x) := f_\Gamma(x),$$

ist linear, bijektiv und isometrisch. Für $x \in \widehat{R}$ bezeichnet $f_\Gamma(x)(w)$ den w-ten Eintrag im Vektor $f_\Gamma(x)$, also $f_\Gamma(x)(w) = f(x+w), w \in \Gamma^\perp$.

Beweis
Offensichtlich ist die Abbildung T linear. Angenommen es gilt $Tf(x) = Tg(x)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$, so folgt $f(x+w) = g(x+w)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $w \in \Gamma^\perp$, das heißt es gilt $f(\xi) = g(\xi)$ für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$, also $f = g$ in $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. Somit ist T injektiv.

Um die Surjektivität der Abbildung T zu zeigen, sei $f_\Gamma \in L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$. Zu beliebigem $\xi \in \mathbb{T}^n$ existieren eindeutige $x \in \widehat{R}, w \in \Gamma^\perp$, so dass $\xi = x + w$ gilt. Definiert man

$$f(\xi) = f(x+w) := f_\Gamma(x)(w)$$

für alle $x \in \widehat{R}$ und alle $w \in \Gamma^\perp$, so folgt

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(\xi)|^2 d\xi &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \sum_{w \in \Gamma^\perp} |f(x+w)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \sum_{w \in \Gamma^\perp} |f_\Gamma(x)(w)|^2 dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \|f_\Gamma(x)\|^2_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} dx < \infty,\end{aligned}$$

also ist f ein Element von $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ und es gilt

$$(Tf)(x) = (f(x+w))_{w \in \Gamma^\perp} = (f_\Gamma(x)(w))_{w \in \Gamma^\perp} = f_\Gamma(x)$$

für alle $x \in \widehat{R}$, das heißt die Abbildung T ist surjektiv.

Sind $f, g \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$, so gilt

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)} &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\xi)\, \overline{g(\xi)} d\xi = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \sum_{w \in \Gamma^\perp} f(x+w)\, \overline{g(x+w)} dx \\ &= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \langle f_\Gamma(x), g_\Gamma(x) \rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} dx = \langle f_\Gamma, g_\Gamma \rangle_{L^2(\widehat{R})} = \langle Tf, Tg \rangle_{L^2(\widehat{R})},\end{aligned}$$

also ist die Abbildung T isometrisch. $\square$

Mit Hilfe der gerade definierten Abbildung T kann die Fouriertransformierte einer $l^2(\mathbb{Z}^n)$-Folge als vektorwertige Funktion aufgefasst werden.

(9.15) Definition (Fouriertransformierte, Fouriertransformation)
Ist T der Operator aus Lemma 9.14, so ist der Modulationsvektor der Fouriertransformierten $\widehat{f}$ einer Folge $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegeben durch

$$\widehat{f}_\Gamma(x) := \left(T\widehat{f}\right)(x) = \left(\widehat{f}(x+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp}.$$

Die Abbildung $\mathcal{F}_{\Gamma^\perp} : l^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big), f \mapsto \widehat{f}_\Gamma$, heißt *Fouriertransformation*.

(9.16) Bemerkung
Es gilt $\mathcal{F}_{\Gamma^\perp} = T \circ \mathcal{F}$, wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ bezeichnet. Da sowohl $\mathcal{F}$, nach dem Satz von Plancherel 5.8, als auch T lineare, bijektive und isometrische Abbildungen sind, ist die Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\Gamma^\perp}$ linear, bijektiv und isometrisch.

Das folgende Lemma wird unter anderem für den Beweis der Darstellung einer lineare, stetigen und Γ-invarianten Abbildung A auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ benötigt.

(9.17) Lemma
Die Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ sei stetig. Existiert eine Abbildung

$$\widehat{A}_\Gamma : \widehat{R} \to \mathbb{C}^{\Gamma^\perp \times \Gamma^\perp},$$

so dass für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$

$$\left(\widehat{Af}\right)_\Gamma(x) = \widehat{A}_\Gamma(x)\,\widehat{f}_\Gamma(x) \tag{11}$$

fast überall auf $\widehat{R}$ gilt, so gilt die Gleichung (11) ebenso für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ fast überall.

Beweis
Sei $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, dann existiert nach Lemma 3.6 b) eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$, die in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegen f konvergiert. Da die Fouriertransformation auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ nach dem Satz von Plancherel 5.8 isometrisch ist, konvergiert die Folge $(\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ in $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ gegen $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. Nach Lemma 9.14 konvergiert dann auch $(\widehat{f}_{k,\Gamma})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$ gegen $\widehat{f}_\Gamma$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\widehat{Af_k}\right)_\Gamma(x) = \widehat{A}_\Gamma(x)\,\widehat{f}_{k,\Gamma}(x) \tag{12}$$

fast überall auf $\widehat{R}$. Sei nun N_k die Nullmenge, so dass (12) für alle $x \in \widehat{R} \setminus N_k$ erfüllt ist. Wird nun die Menge $M := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$ definiert, so ist M eine Nullmenge und die Gleichung in (12) gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \widehat{R} \setminus M$. Da $(\widehat{f}_{k,\Gamma})_{k\in\mathbb{N}}$ in $L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$ gegen $\widehat{f}_\Gamma$ konvergiert, existiert eine Teilfolge $(\widehat{f_{k_l,\Gamma}})_{l\in\mathbb{N}}$, die fast überall gegen $\widehat{f}_\Gamma$ konvergiert, vgl.

[4, Kapitel VI, Korollar 2.7]. Nach Lemma 9.14 und dem Satz von Plancherel 5.8 konvergiert die Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ gegen f und es folgt mit der Stetigkeit von A auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ und Bemerkung 9.16

$$\begin{aligned}\big(\widehat{Af}\big)_\Gamma(x) &= \big(A\big(\lim_{l\to\infty} f_{k_l}\big)\big)^{\widehat{}}_\Gamma(x) = \lim_{l\to\infty}\big(\widehat{Af_{k_l}}\big)_\Gamma(x)\\ &= \lim_{l\to\infty}\widehat{A}_\Gamma(x)\,\widehat{f_{k_l}}_{,\Gamma}(x) = \widehat{A}_\Gamma(x)\,\widehat{f}_\Gamma(x)\end{aligned}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}\setminus M$ und somit fast überall auf $\widehat{R}$. □

Nun wird die Darstellung einer lineare, stetigen und Γ-invarianten Abbildung A auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen. Insbesondere stimmt in diesem Fall die Operatornorm von A mit dem wesentlichen Supremum der zu A gehörigen Matrix auf der Fourierseite überein.

(9.18) Satz
Die Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ sei linear, stetig und Γ-invariant. Dann existiert eine, bis auf eine Nullmenge eindeutige, beschränkte und messbare Abbildung $\widehat{A}_\Gamma : \widehat{R} \to \mathbb{C}^{\Gamma^\perp\times\Gamma^\perp}$, so dass für $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$

$$\big(\widehat{Af}\big)_\Gamma(x) = \widehat{A}_\Gamma(x)\,\widehat{f}_\Gamma(x) \tag{13}$$

fast überall auf $\widehat{R}$ gilt. Außerdem gilt

$$\|A\|_{\text{op}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}}\|\widehat{A}_\Gamma(x)\|_{\text{op}}.$$

Beweis
Um die Lesbarkeit zu erleichtern, wird $a_m(k) := (A\delta_{-k})(m)$ für alle $k, m \in \mathbb{Z}^n$ definiert. Da $A\delta_r \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ gilt, folgt für beliebiges, aber festes $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|a_m(k)|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|(A\delta_{-k})(m)|^2 = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma}|(T_\gamma A\delta_r)(m)|^2 = \sum_{r\in R}\sum_{\gamma\in\Gamma}|(A\delta_r)(m-\gamma)|^2\\ &\le \sum_{r\in R}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}|(A\delta_r)(m-l)|^2 = \sum_{r\in R}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|(A\delta_r)(k)|^2 < \infty,\end{aligned}$$

also ist a_m ein Element von $l^2(\mathbb{Z}^n)$. Für $f \in l^2(\mathbb{Z}^n), r \in R$ und $\gamma \in \Gamma$ gilt nach Lemma 3.8 und Satz A.4

$$\begin{aligned}(Af)(r+\gamma) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,(A\delta_k)(r+\gamma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k+\gamma)\,\big(A\delta_{k+\gamma}\big)(r+\gamma)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k+\gamma)\,(AT_\gamma\delta_k)(r+\gamma) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k+\gamma)\,(T_\gamma A\delta_k)(r+\gamma)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k+\gamma)\,(A\delta_k)(r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(A\delta_{-k})(r)\,f(\gamma-k)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a_r(k)\,f(\gamma-k) = (a_r * f)(\gamma).\end{aligned}$$

Da jedes $m \in \mathbb{Z}^n$ eine eindeutige Darstellung $m = r_0 + \gamma_0, r_0 \in R, \gamma_0 \in \Gamma$, besitzt, folgt mit $P : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), Pf = \mathbb{1}_\Gamma \cdot f$,

$$\begin{aligned}(Af)(m) &= (Af)(r_0+\gamma_0) = (a_{r_0} * f)(\gamma_0)\\ &= \sum_{r\in R} (\mathbb{1}_\Gamma \cdot (a_r * f))(\gamma_0 + r_0 - r)\\ &= \sum_{r\in R} (T_r \circ P)(a_r * f)(\gamma_0 + r_0)\\ &= \sum_{r\in R} (T_r \circ P)(a_r * f)(m).\end{aligned}$$

Zunächst wird die Darstellung in (13) für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ bewiesen. Ist $f \in S(\mathbb{Z}^n)$, so gilt insbesondere $f \in l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$ und $a_r * f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ für jedes $r \in R$ nach der Youngschen Ungleichung A.10. Es folgt mit obiger Rechnung, Lemma 5.9 a) und b), Korollar 5.17, Satz 6.8 und Bemerkung 5.36

$$\begin{aligned}(Af)\widehat{\ }(\xi) &= \sum_{r\in R} ((T_r \circ P)(a_r * f))\widehat{\ }(\xi)\\ &= \sum_{r\in R} e^{-i\langle \xi, r\rangle} (P(a_r * f))\widehat{\ }(\xi)\\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} e^{-i\langle \xi, r\rangle} \sum_{z\in\Gamma^\perp} T_z (a_r * f)\widehat{\ }(\xi)\\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} e^{-i\langle \xi, r\rangle} \sum_{z\in\Gamma^\perp} (a_r * f)\widehat{\ }(\xi - z)\\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} e^{-i\langle \xi, r\rangle} \sum_{z\in\Gamma^\perp} (a_r * f)\widehat{\ }(\xi + z)\\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} e^{-i\langle \xi, r\rangle} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{a_r}(\xi + z) \cdot \widehat{f}(\xi + z)\end{aligned}$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$. Wird nun $D^{-r} := \operatorname{diag}\left(\left(e^{-i\langle w, r\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp}\right)$ definiert, so folgt für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\begin{aligned}\left(\widehat{Af}\right)_\Gamma(x) &= \left(\widehat{Af}(x+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp}\\ &= \left(|\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} e^{-i\langle x+w, r\rangle} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{a_r}(x+z+w) \cdot \widehat{f}(x+z+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp}\\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} e^{-i\langle x, r\rangle} D^{-r} (1,\dots,1)^T \otimes (1,\dots,1)^T \operatorname{diag}\left((\widehat{a_r})_\Gamma(x)\right) \cdot \widehat{f}_\Gamma(x)\\ &= \widehat{A}_\Gamma(x) \cdot \widehat{f}_\Gamma(x),\end{aligned}$$

mit

$$\widehat{A}_\Gamma(x) := |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} e^{-i\langle x, r\rangle} D^{-r} (1,\dots,1)^T \otimes (1,\dots,1)^T \operatorname{diag}\left((\widehat{a_r})_\Gamma(x)\right)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$.

Die Abbildung A ist nach Voraussetzung stetig, also gilt (13) nach Lemma 9.17 ebenso fast überall auf $\widehat{R}$, wenn es sich bei f um ein Element aus $l^2(\mathbb{Z}^n)$ handelt.

Als Komposition messbarer Funktionen ist die Abbildung $\widehat{A}_\Gamma$ messbar. Da die Folgen $(a_r)_{r\in R}$ durch die Abbildung A eindeutig festgelegt werden, sind ihre Fouriertransformierten $(\widehat{a}_r)_{r\in R}$ bis auf Nullmengen eindeutig festgelegt. Somit ist $\widehat{A}_\Gamma$ eindeutig bis auf eine Nullmenge.

Nach Satz A.9, dem Satz von Plancherel 5.8 und Bemerkung 9.16 gilt

$$\begin{aligned}\|A\|_{\text{op}} &= \sup_{\substack{f\in l^2(\mathbb{Z}^n)\\ \|f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)}\le 1}} \frac{\|Af\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)}}{\|f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)}} = \sup_{\substack{\widehat{f}\in L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})\\ \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})}\le 1}} \frac{\|\widehat{Af}\|_{L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})}}{\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})}} \\ &= \sup_{\substack{\widehat{f}_\Gamma\in L^2(\widehat{R})\\ \|\widehat{f}_\Gamma\|_{L^2(\widehat{R})}\le 1}} \frac{\|(\widehat{Af})_\Gamma\|_{L^2(\widehat{R})}}{\|\widehat{f}_\Gamma\|_{L^2(\widehat{R})}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \|\widehat{A}_\Gamma(x)\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

□

(9.19) Bemerkungen

a) Unter den Voraussetzungen von Satz 9.18 gilt

$$\begin{aligned}\widehat{Af}(\xi) = \widehat{Af}(x+v) &= \left(\widehat{Af}\right)_\Gamma(x)(v) \\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{A}_\Gamma(x)(v,z)\,\widehat{f}_\Gamma(x)(z) \\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{A}_\Gamma(x)(v,z)\,\widehat{f}(x+z),\end{aligned}$$

für fast alle $\xi = x+v \in \mathbb{T}^n, x\in\widehat{R}, v\in\Gamma^\perp$, wobei $\widehat{A}_\Gamma(x)(v,z)$ den Eintrag der Matrix $\widehat{A}_\Gamma$ an der Stelle (v,z) bezeichnet.

b) Auch die Darstellungen aus den Sätzen 9.7 und 9.9 für lineare, stetige und Γ-invariante Abbildungen $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ lassen sich unter geeigneten Voraussetzungen als Matrix-Vektor-Produkt auffassen.

(i) Ist $w_z \in L^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})$ für alle $z\in\Gamma^\perp$, so gilt $\widehat{Af}\in L^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})$ für alle $f\in S(\mathbb{Z}^n)$ nach Satz 9.7 und mit Bemerkung 5.36 folgt

$$\begin{aligned}\widehat{Af}(\xi) = \widehat{Af}(x+v) &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} w_z(x+v)\,T_z\widehat{f}(x+v) \qquad (14)\\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} w_z(x+v)\,\widehat{f}(x+v-z) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} w_{v-z}(x+v)\,\widehat{f}(x+z) \\ &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{A}_{\Gamma,1}(x)(v,z)\,\widehat{f}(x+z),\end{aligned}$$

für fast alle $\xi = x+v\in\mathbb{T}^n, x\in\widehat{R}, v\in\Gamma^\perp$, wenn man

$$\widehat{A}_{\Gamma,1}(x)(v,z) := w_{v-z}(x+v)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, z \in \Gamma^{\perp}$ setzt.

Die Gleichung (14) gilt insbesondere für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, wenn es sich bei A um eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung von $l^2(\mathbb{Z}^n)$ nach $l^2(\mathbb{Z}^n)$ handelt. Dies wird erst in Bemerkung 9.22 erläutert, da für eine Begründung der Zusammenhang, der zwischen den Resultaten der Sätze 9.7 und 9.9 besteht, benötigt wird.

(ii) Gilt $\widehat{A\delta_r} \in L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $r \in R$, so gilt $\widehat{Af} \in L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ nach Satz 9.9 und mit Bemerkung 5.36 folgt

$$\begin{aligned}\widehat{Af}(\xi) = \widehat{Af}(x+v) &= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \sum_{r \in R} \widehat{A\delta_r}(x+v)\, T_z e^{i\langle x+v,r\rangle} T_z \widehat{f}(x+v) \qquad (15)\\ &= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \sum_{r \in R} \widehat{A\delta_r}(x+v)\, e^{i\langle x+v-z,r\rangle} \widehat{f}(x+v-z)\\ &= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \sum_{r \in R} \widehat{A\delta_r}(x+v)\, e^{i\langle x+z,r\rangle} \widehat{f}(x+z)\\ &= \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \widehat{A}_{\Gamma,2}(x)(v,z)\, \widehat{f}(x+z),\end{aligned}$$

für fast alle $\xi = x + v \in \mathbb{T}^n, x \in \widehat{R}, v \in \Gamma^{\perp}$, wenn man

$$\widehat{A}_{\Gamma,2}(x)(v,z) := |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{r \in R} \widehat{A\delta_r}(x+v)\, e^{i\langle x+z,r\rangle}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, z \in \Gamma^{\perp}$ setzt.

Gilt $\widehat{A\delta_r} \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $r \in \mathbb{R}$, so kann auf analoge Weise begründet werden, dass Gleichung (15) für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $\xi = x + v \in \mathbb{T}^n$ erfüllt ist. Ist die Abbilung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ linear, stetig und Γ-invariant, so gilt die Gleichung (15) nach Lemma 9.17 sogar für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $\xi = x + v \in \mathbb{T}^n, x \in \widehat{R}, v \in \Gamma^{\perp}$.

(9.20) Korollar
Für lineare, stetige und Γ-invariante Abbildungen $A, B : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ gelten die folgenden Aussagen:

a) Es gilt
$$\left(\widehat{A+B}\right)_{\Gamma}(x) = \widehat{A}_{\Gamma}(x) + \widehat{B}_{\Gamma}(x)$$
für fast alle $x \in \widehat{R}$.

b) Es gilt
$$\left(\widehat{A \circ B}\right)_{\Gamma}(x) = \widehat{A}_{\Gamma}(x) \cdot \widehat{B}_{\Gamma}(x)$$
für fast alle $x \in \widehat{R}$.

Beweis

a) Sei $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ beliebig, dann folgt für fast alle $x \in \widehat{R}$ mit Bemerkung 9.16 und Satz 9.18

$$\begin{aligned}((A+B)f)\widehat{_\Gamma}(x) &= (Af+Bf)\widehat{_\Gamma}(x) = (Af)\widehat{_\Gamma}(x) + (Bf)\widehat{_\Gamma}(x) \\ &= \widehat{A}_\Gamma(x)\cdot\widehat{f}_\Gamma(x) + \widehat{B}_\Gamma(x)\cdot\widehat{f}_\Gamma(x) \\ &= \left(\widehat{A}_\Gamma(x) + \widehat{B}_\Gamma(x)\right)\cdot\widehat{f}_\Gamma(x).\end{aligned}$$

b) Sei $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ beliebig, dann folgt für fast alle $x \in \widehat{R}$ mit Bemerkung 9.16 und Satz 9.18

$$\begin{aligned}((A\circ B)f)\widehat{_\Gamma}(x) &= (A(Bf))\widehat{_\Gamma}(x) = \widehat{A}_\Gamma(x)\cdot\left(\widehat{Bf}\right)_\Gamma(x) \\ &= \widehat{A}_\Gamma(x)\cdot\widehat{B}_\Gamma(x)\cdot\widehat{f}_\Gamma(x).\end{aligned}$$

□

9.4 Vergleich der verschiedenen Darstellungen

Wie die vorhergehenden Abschnitte zeigen, kann eine lineare, stetige und Γ-invarinate Abbildung A auf verschiedene Weisen charakterisiert werden. Wichtig ist dabei, dass wegen der Bijektivität der Fouriertransformationen die Abbildung A durch die Angabe der $(w_z)_{z\in\Gamma^\perp}$, der $(A\delta_r)_{r\in R}$ bzw. der $(\widehat{A\delta_r})_{r\in R}$ sowie der $(\widehat{A}_\Gamma(x))_{x\in\widehat{R}}$ eindeutig festgelegt wird. Es stellt sich also die Frage nach den Zusammenhängen, die zwischen diesen Funktionalen bzw. Funktionen bestehen. Diese sollen in diesem Abschnitt untersucht werden.

Als erstes werden die Resultate der Sätze 9.7 und 9.9 betrachtet. Zwischen ihnen lässt sich leicht eine Verbindung herstellen.

(9.21) Korollar

Ist die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ linear, stetig und Γ-invariant, so gilt für $z \in \Gamma^\perp$

$$w_z = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} \widehat{A\delta_r}\cdot T_z e^{i\langle\cdot,r\rangle}$$

sowie für $r \in R$

$$A\delta_r = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z\in\Gamma^\perp} \mathcal{F}^{-1}\left(w_z \cdot T_z e^{i\langle\cdot,r\rangle}\right),$$

wobei $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ bezeichnet.

Beweis
Aus dem Vergleich der Resultate der Sätze 9.7 und 9.9 folgt direkt die Darstellung der $w_z, z \in \Gamma^\perp$. Sei nun $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ beliebig, dann folgt mit Satz 9.7 und Beispiel 5.20

$$\begin{aligned}(A\delta_r, f) = \left(\widehat{A\delta_r}, \mathcal{F}_c^{-1} f\right) &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^\perp} \left(w_z \cdot T_z e^{i\langle \cdot, r\rangle}, \mathcal{F}_c^{-1} f\right) \\ &= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{z \in \Gamma^\perp} \left(\mathcal{F}^{-1}\left(w_z \cdot T_z e^{i\langle \cdot, r\rangle}\right), f\right),\end{aligned}$$

wenn $\mathcal{F}$ die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ bezeichnet. □

(9.22) Bemerkung
Ist die Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ linear, stetig und Γ-invariant, so gilt nach dem Satz von Plancherel 5.8 $\widehat{A\delta_r} \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für jedes $r \in R$. Die Funktion $\mathbb{T}^n \ni \xi \mapsto T_z e^{i\langle \xi, r\rangle}$ ist für jedes $r \in R$ und jedes $z \in \Gamma^\perp$ beschränkt, also folgt aus Korollar 9.21, dass $w_z \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}) \subset L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für jedes $z \in \Gamma^\perp$ gilt. Somit besitzt die Abbildung A die Darstellung (14) aus Bemerkung 9.19 b) (i) für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $\xi = x + v \in \mathbb{T}^n, x \in \widehat{R}, v \in \Gamma^\perp$. Mit Lemma 9.17 folgt, dass die Darstellung (14) für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $\xi = x + v \in \mathbb{T}^n, x \in \widehat{R}, v \in \Gamma^\perp$, gilt.

Der Beweis des Zusammenhangs zwischen den beiden Darstellungen aus den Sätzen 9.9 und 9.18 lässt sich nicht so leicht führen wie der Beweis von Korollar 9.21. Es wird das folgende Lemma benötigt.

(9.23) Lemma*
Wird für jedes $r \in R$ die Abbildung $\widetilde{\chi}_r : \Gamma^\perp \to \mathbb{T}, \widetilde{\chi}_r(z) := e^{i\langle z, r\rangle}$ definiert, so ist das System $\left(|\Gamma^\perp|^{-1/2} \widetilde{\chi}_r\right)_{r \in R}$ eine Orthonormalbasis von $l^2(\Gamma^\perp)$.

Beweis
Für $z \in \Gamma^\perp$ ist nach Lemma 5.11 die Abbildung $\chi_z : \mathbb{Z}^n/\Gamma \to \mathbb{T}, \chi_z(r + \Gamma) = e^{i\langle z, r\rangle}$, ein Charakter von $\mathbb{Z}^n/\Gamma$. Es folgt mit dem Satz von Peter-Weyl, vgl. [7, Theorem 27.40], dass das System $\left(|\Gamma^\perp|^{-1/2} \chi_z\right)_{z \in \Gamma^\perp}$ eine Orthonormalbasis von $l^2(\mathbb{Z}^n/\Gamma)$ ist. Da die kanonische Projektion $r \mapsto r + \Gamma$ bijektiv ist, ist $\left(|\Gamma^\perp|^{-1/2} \chi_z\right)_{z \in \Gamma^\perp}$ auch eine Orthormalbasis von $l^2(R)$. Wird nun die Matrix

$$F := \left(|\Gamma^\perp|^{-1/2} e^{i\langle z, r\rangle}\right)_{(z,r) \in \Gamma^\perp \times R}$$

definiert, so bilden ihre Zeilen eine Orthonormalbasis, das heißt die Matrix F beschreibt eine unitäre Abbildung von $l^2(R)$ nach $l^2(\Gamma^\perp)$. Insbesondere bilden dann die Spalten von F eine Orthonormalbasis von $l^2(\Gamma^\perp)$. □

Jetzt wird die Verbindung, die zwischen $(\widehat{A\delta_r})_{r \in R}$ und $(\widehat{A}_\Gamma(x))_{x \in \Gamma^\perp}$ besteht, bewiesen.

(9.24) Korollar*
Ist $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ eine lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung, so gilt

$$\widehat{A}_\Gamma(x)(v, z) = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r \in R} \widehat{A\delta_r}(x + v)\, e^{i\langle x + z, r\rangle}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, z \in \Gamma^{\perp}$. Andererseits gilt

$$\widehat{A\delta_r}\,(x+v) = \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \widehat{A}_{\Gamma}\,(x)\,(v,z)\, e^{-i\langle x+z,r\rangle}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, z \in \Gamma^{\perp}$.

Beweis

Da nach Voraussetzung $\widehat{A\delta_r} \in L^2\,(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $r \in R$ gilt, folgt die Darstellung der $(\widehat{A}_{\Gamma}(x))_{x \in \Gamma^{\perp}}$ aus Bemerkung 9.19 b) (ii) und Lemma 9.17.

Um die Darstellung für $(\widehat{A\delta_r})_{r \in R}$ zu zeigen, wird die Matrix $B(x)$ durch

$$B(x)\,(v,r) := \widehat{A\delta_r}\,(x+v)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v \in \Gamma^{\perp}, r \in R$ definiert. Ziel ist es, die Matrix $\widehat{A}_{\Gamma}\,(x)\,, x \in \widehat{R}$, so zu faktorisieren, dass einer der auftretenden Faktoren die Matrix $B(x)$ ist und die anderen Faktoren invertierbar sind. Die erste Aussage diese Korollars besagt, dass

$$\widehat{A}_{\Gamma}\,(x)\,(v,z) = |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{r \in R} \widehat{A\delta_r}\,(x+v)\, e^{i\langle x+z,r\rangle}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, z \in \Gamma^{\perp}$ gilt. Daraus lässt sich für die Matrix $\widehat{A}_{\Gamma}\,(x)$ eine Schreibweise als Matrixprodukt ablesen: Es gilt für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\widehat{A}_{\Gamma}\,(x) = |\Gamma^{\perp}|^{-1} B\,(x) \cdot C\,(x)\,,$$

mit $C\,(x)\,(r,z) := e^{i\langle x,r\rangle} e^{i\langle z,r\rangle}, r \in R, z \in \Gamma^{\perp}$. Die Matrix $C\,(x)$ lässt sich weiter faktorisieren in $C\,(x) = D\,(x) \cdot F_{\Gamma^{\perp}}$ mit

$$D\,(x) := \operatorname{diag}\left(\left(e^{i\langle x,r\rangle}\right)_{r \in R}\right) \qquad \text{und} \qquad F_{\Gamma^{\perp}} := \left(e^{i\langle z,r\rangle}\right)_{(r,z) \in R \times \Gamma^{\perp}}.$$

Damit gilt $\widehat{A}_{\Gamma}\,(x) = |\Gamma^{\perp}|^{-1} B\,(x) \cdot D\,(x) \cdot F_{\Gamma^{\perp}}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$. Nach Lemma 9.23 handelt es sich bei $|\Gamma^{\perp}|^{-1/2} F_{\Gamma^{\perp}}^{T}$ um eine unitäre Matrix, also ist $|\Gamma^{\perp}|^{-1/2} F_{\Gamma^{\perp}}$ unitär. Die Matrix $D\,(x)\,, x \in \Gamma^{\perp}$, ist offensichtlich ebenso unitär. Also gilt

$$B\,(x) = |\Gamma^{\perp}| \cdot \widehat{A}_{\Gamma}\,(x) \cdot F_{\Gamma^{\perp}}^{-1} \cdot D\,(x)^{*} = |\Gamma^{\perp}| \cdot \widehat{A}_{\Gamma}\,(x) \cdot F_{\Gamma^{\perp}}^{-1} \cdot D\,(-x)\,,$$

und mit

$$\begin{aligned} & |\Gamma^{\perp}|^{-1/2} F_{\Gamma^{\perp}}^{*} = \left(|\Gamma^{\perp}|^{-1/2} F_{\Gamma^{\perp}}\right)^{*} = \left(|\Gamma^{\perp}|^{-1/2} F_{\Gamma^{\perp}}\right)^{-1} = |\Gamma^{\perp}|^{1/2} F_{\Gamma^{\perp}}^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & F_{\Gamma^{\perp}}^{-1} = |\Gamma^{\perp}|^{-1} F_{\Gamma^{\perp}}^{*} \end{aligned}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \widehat{A\delta_r}\,(x+v) &= B\,(x)\,(v,r) = |\Gamma^{\perp}| \left(\widehat{A}_{\Gamma}\,(x) \cdot F_{\Gamma^{\perp}}^{-1} \cdot D\,(-x)\right)(v,r) \\ &= (\widehat{A}_{\Gamma}\,(x) \cdot F_{\Gamma^{\perp}}^{*} \cdot D\,(-x))\,(v,r) \\ &= \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \widehat{A}_{\Gamma}\,(x)\,(v,z)\,(F_{\Gamma^{\perp}}^{*} \cdot D\,(-x))\,(z,r) \\ &= \sum_{z \in \Gamma^{\perp}} \widehat{A}_{\Gamma}\,(x)\,(v,z)\, e^{-i\langle x+z,r\rangle} \end{aligned}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $r \in R, v \in \Gamma^{\perp}$. $\square$

9.5 Folgerungen aus den verschiedenen Darstellungen

Die in Korollar 9.24 gezeigte Verbindung zwischen $(\widehat{A\delta_r})_{r\in R}$ und $(\widehat{A}_\Gamma(x))_{x\in\Gamma^\perp}$ ermöglicht es, eine notwendige und hinreichende Bedingung für die stetige Fortsetzbarkeit einer linearen, stetigen und Γ-invarianten Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ anzugeben. Zum Schluss wird der Zusammenhang zwischen der $\mathbb{Z}^n$-Shiftinvarianz einer linearen, stetigen und Γ-invarianten Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ und ihrer Matrix der Fouriertransformierten bewiesen.

(9.25) Satz
Die lineare, stetige und Γ-invariante Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ lässt sich genau dann zu einer linearen und stetigen Abbildung $\widetilde{A} : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ fortsetzen, wenn $\widehat{A\delta_r} \in L^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für jedes $r \in R$ gilt.

Beweis
Es gelte $\widehat{A\delta_r} \in L^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $r \in R$. Nach Abschnitt 2.1 gilt $\widehat{A\delta_r} \subset L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $r \in R$, also folgt $\widehat{Af} \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$. Nach dem Satz von Plancherel 5.8 gilt $Af \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ sowie

$$\|Af\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \left\|\widehat{Af}\right\|_{L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})}$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$. Aus Bemerkung 9.19 b) (ii) folgt für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$

$$\begin{aligned}\widehat{Af}(\xi) &= \sum_{z\in\Gamma^\perp} \widehat{A}_{\Gamma,2}(x)(v,z)\,\widehat{f}(x+z) \\ &= \left(\widehat{A}_{\Gamma,2}(x)\,\widehat{f}_\Gamma(x)\right)(v)\end{aligned}$$

für fast alle $\xi = x + v \in \mathbb{T}^n, x \in \widehat{R}, v \in \Gamma^\perp$ mit

$$\widehat{A}_{\Gamma,2}(x)(v,z) := |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r\in R} \widehat{A\delta_r}(x+v)\, e^{i\langle x+z,r\rangle}.$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, z \in \Gamma^\perp$.

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $r \in R$ eine Konstante $C_r > 0$, so dass

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{T}^n} |\widehat{A\delta_r}(\xi)| \le C_r$$

erfüllt ist. Dann folgt mit Lemma 9.14 und dem Satz von Plancherel 5.8 für beliebiges $f \in S(\mathbb{Z}^n)$

$$\begin{aligned}\|Af\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \|\widehat{Af}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} |\widehat{Af}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\widehat{R}} \sum_{v\in\Gamma^\perp} \left| \left(\widehat{A}_{\Gamma,2}(x)\,\widehat{f}_\Gamma(x)\right)(v) \right|^2 dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \| \widehat{A}_{\Gamma,2}(x)\, \widehat{f}_{\Gamma}(x) \|^2_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} dx \\
&\leq C_1 \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \widehat{R}} \| \widehat{A}_{\Gamma,2}(y) \|^2_{\mathrm{op}} (2\pi)^{-n} \int\limits_{\widehat{R}} \| \widehat{f}_{\Gamma}(x) \|^2_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} dx \\
&= C_2 \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \widehat{R}} \left(\max_{v \in \Gamma^\perp} \left| \sum_{w \in \Gamma^\perp} \widehat{A}_{\Gamma,2}(y)(v,w) \right| \right)^2 (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= C_2 \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \widehat{R}} \left(\max_{v \in \Gamma^\perp} \left| \sum_{w \in \Gamma^\perp} |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{r \in R} \widehat{A\delta_r}(y+v)\, e^{i\langle y+w,r\rangle} \right| \right)^2 \|\widehat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^n,\mathbb{C})} \\
&\leq |\Gamma^\perp|^{-1} C_2 \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \widehat{R}} \left(\max_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{w \in \Gamma^\perp} \sum_{r \in R} |\widehat{A\delta_r}(y+v)| \right)^2 \|f\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \\
&= C_1 \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \widehat{R}} \left(\max_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{r \in R} |\widehat{A\delta_r}(y+v)| \right)^2 \|f\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \\
&\leq C_2 \left(\sum_{r \in R} \operatorname*{ess\,sup}_{y \in \widehat{R}} \max_{v \in \Gamma^\perp} |\widehat{A\delta_r}(y+v)| \right)^2 \|f\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \\
&\leq C_2 \left(\sum_{r \in R} C_r \right)^2 \|f\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \leq C \|f\|^2_{l^2(\mathbb{Z}^n)}
\end{aligned}
$$

für eine Konstante $C > 0$, also ist die Abbildung $A : S(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ stetig bezüglich $l^2(\mathbb{Z}^n)$. Da der Raum der Schwartzfolgen nach Lemma 3.6 b) dicht in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ liegt, folgt aus dem Fortsetzungssatz A.11, dass eine eindeutige lineare und stetige Fortsetzung $\widetilde{A} : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ existiert.

Die Abbildung $\widetilde{A} : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ sei stetig. Da $\widetilde{A}$ eine Fortsetzung der Abbildung A ist, gilt insbesondere $\widetilde{A}\delta_r = A\delta_r$ für alle $r \in R$. Um zu zeigen, dass $\widehat{A\delta_r} \in L^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für jedes $r \in R$ aus der Stetigkeit der Abbildung $\widetilde{A}$ folgt, wird auf den Beweis von Korollar 9.24 zurückgegriffen, da mit Hilfe der Gesamtnorm der Matrix $B(x)$ Aussagen über die Beschränktheit der $(\widehat{A\delta_r})_{r \in R}$ getroffen werden können. Schließlich führt die Annahme, dass ein $r_0 \in R$ existiert, so dass $\widehat{A\delta_{r_0}}$ eine unbeschränkte Funktion ist, zu einem Widerspruch zur Stetigkeit von A.

In Korollar 9.24 wurde gezeigt, dass $\widehat{A}_\Gamma(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} B(x) \cdot D(x) \cdot F_{\Gamma^\perp}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ gilt, mit

$$
B(x)(v,r) = \widehat{A\delta_r}(x+v), \quad D(x) := \operatorname{diag}\left(\left(e^{i\langle x,r\rangle} \right)_{r \in R} \right) \quad \text{und} \quad F_{\Gamma^\perp} := \left(e^{i\langle z,r\rangle} \right)_{(r,z) \in R \times \Gamma^\perp}
$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$. Da es sich bei $|\Gamma^\perp|^{-1/2} F_{\Gamma^\perp}$ und $D(x)$ um unitäre Matrizen handelt, gilt

$$\begin{aligned}
\|\widehat{A}_\Gamma(x)\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{v\in\mathbb{C}^{|\Gamma^\perp|}\setminus\{0\}} \frac{\|\widehat{A}_\Gamma(x)\,v\|}{\|v\|} \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1/2} \sup_{v\in\mathbb{C}^{|\Gamma^\perp|}\setminus\{0\}} \frac{\|B(x)\cdot D(x)\cdot|\Gamma^\perp|^{-1/2}F_{\Gamma^\perp}v\|}{\|v\|} \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1/2} \sup_{v\in\mathbb{C}^{|\Gamma^\perp|}\setminus\{0\}} \frac{\|B(x)\cdot D(x)\cdot|\Gamma^\perp|^{-1/2}F_{\Gamma^\perp}v\|}{\||\Gamma^\perp|^{-1/2}F_{\Gamma^\perp}v\|} \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1/2} \sup_{v\in\mathbb{C}^{|\Gamma^\perp|}\setminus\{0\}} \frac{\|B(x)\cdot D(x)\cdot|\Gamma^\perp|^{-1/2}F_{\Gamma^\perp}v\|}{\|D(x)\,|\Gamma^\perp|^{-1/2}F_{\Gamma^\perp}v\|} \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1/2} \sup_{w\in\mathbb{C}^{|\Gamma^\perp|}\setminus\{0\}} \frac{\|B(x)\,w\|}{\|w\|} = |\Gamma^\perp|^{-1/2}\|B(x)\|_{\mathrm{op}}.
\end{aligned}$$

Angenommen es existiert nun ein $r_0 \in R$, so dass die Funktion $\widehat{A\delta_{r_0}}$ nicht beschränkt ist. Dann folgt mit Satz 9.18 und der Definition von $B(x) \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp\times\Gamma^\perp}$

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathrm{op}} &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \|\widehat{A}_\Gamma(x)\|_{\mathrm{op}} = |\Gamma^\perp|^{-1/2} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \|B(x)\|_{\mathrm{op}} \\
&\leq c|\Gamma^\perp|^{-1/2} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \|B(x)\|' \\
&= c|\Gamma^\perp|^{-1/2}|\Gamma^\perp| \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \max_{(v,r)\in\Gamma^\perp\times R} |\widehat{A\delta_{r_0}}(x+v)| \\
&> C
\end{aligned}$$

für jede Konstante $C > 0$, wenn man für eine Matrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Gesamtnorm

$$\|M\|' := n \cdot \max_{1\leq j,k\leq n} |M(j,k)|$$

betrachtet. Dies ist ein Widerspruch zur Stetigkeit von $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$. □

Der gerade gezeigte Satz liefert eine Aussage darüber, wann der Faltungsoperator auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ stetig in $l^2(\mathbb{Z}^n)$ abbildet.

(9.26) Korollar
Für $g \in S'(\mathbb{Z}^n)$ ist der lineare, Γ-invariante Faltungsoperator

$$C_g : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), f \mapsto g * f,$$

genau dann stetig, wenn $\widehat{g} \in L^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ gilt.

Beweis
Nach Korollar 8.9 ist der Faltungsoperator $C_g : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ linear, stetig und Γ-invariant. Nach Satz 9.25 ist damit $C_g : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ genau dann stetig, wenn

$\widehat{C_g\delta_r} \in L^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für jedes $r \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Mit dem Faltungssatz 6.7 und Beispiel 5.20 folgt

$$\begin{aligned}\|\widehat{C_g\delta_r}\|_\infty &= \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{T}^n} |\widehat{g * \delta_r}(\xi)| = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{T}^n} |(\widehat{g}\cdot\widehat{\delta_r})(\xi)| \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{T}^n} |\widehat{g}(\xi)\cdot e^{-i\langle\xi,r\rangle}| = \operatorname*{ess\,sup}_{\xi\in\mathbb{T}^n} |\widehat{g}(\xi)| = \|\widehat{g}\|_\infty,\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Mit Hilfe der in Abschnitt 9.3 bewiesenen Darstellung kann eine notwendige und hinreichende Bedingung für die $\mathbb{Z}^n$-Shiftinvarianz einer Abbildung $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ formuliert werden. Dafür wird die zur Fouriertransformierten des Verschiebungsoperatores gehörige Matrix benötigt.

(9.27) Lemma
Für $l \in \mathbb{Z}^n$ und den Verschiebungsoperator $T_l : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\widehat{T}_{l,\Gamma}(x) = e^{-i\langle x,l\rangle} D^{-l}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ mit $D^{-l} := \operatorname{diag}\left(\left(e^{-i\langle w,l\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp}\right)$.

Beweis
Für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ gilt $\widehat{T_l f}(\xi) = e^{-i\langle\xi,l\rangle}\widehat{f}(\xi)$ nach Lemma 5.9 b). Es folgt

$$\begin{aligned}(\widehat{T_l f})_\Gamma(x) &= \left(\widehat{T_l f}(x+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp} = \left(e^{-i\langle x+w,l\rangle}\widehat{f}(x+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp} \\ &= e^{-i\langle x,l\rangle}\operatorname{diag}\left(\left(e^{-i\langle w,l\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp}\right)\widehat{f}_\Gamma(x),\end{aligned}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$, also die Darstellung von $\widehat{T}_{l,\Gamma}(x)$. □

(9.28) Lemma
Sei $A : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ linear, stetig und Γ-invariant. Die Abbildung A ist genau dann $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant, wenn $\widehat{A}_\Gamma(x)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ diagonal ist.

Beweis
Nach Lemma 2.3 und Beispiel 8.2 a) ist der Verschiebungsoperator

$$T_l : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$$

für jedes $l \in \mathbb{Z}^n$ linear, stetig und Γ-invariant. Wegen der Bijektivität der Fouriertransformation $\mathcal{F}_{\Gamma^\perp}$, vgl. Bemerkung 9.16, und Korollar 9.20 b) folgt

$$\begin{aligned} & AT_l f = T_l A f \\ \Leftrightarrow\quad & (AT_l f)\widehat{\ }_\Gamma(x) = (T_l A f)\widehat{\ }_\Gamma(x) \\ \Leftrightarrow\quad & \widehat{A}_\Gamma(x)\,\widehat{T}_{l,\Gamma}(x)\,\widehat{f}_\Gamma(x) = \widehat{T}_{l,\Gamma}(x)\,\widehat{A}_\Gamma(x)\,\widehat{f}_\Gamma(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad \widehat{A}_\Gamma\left(x\right)\widehat{T}_{l,\Gamma}\left(x\right)\left(u,v\right)=\widehat{T}_{l,\Gamma}\left(x\right)\widehat{A}_\Gamma\left(x\right)\left(u,v\right)\ \text{ für alle } u,v\in\Gamma^\perp\\
&\Leftrightarrow\quad \widehat{A}_\Gamma\left(x\right)\cdot\operatorname{diag}\left(\left(e^{-i\langle w,l\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp}\right)\left(u,v\right)=\operatorname{diag}\left(\left(e^{-i\langle w,l\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp}\right)\cdot\widehat{A}_\Gamma\left(x\right)\left(u,v\right)\\
&\qquad\ \text{für alle } u,v\in\Gamma^\perp\\
&\Leftrightarrow\quad e^{-i\langle v,l\rangle}\widehat{A}_\Gamma\left(x\right)\left(u,v\right)=e^{-i\langle u,l\rangle}\widehat{A}_\Gamma\left(x\right)\left(u,v\right)\ \text{ für alle } u,v\in\Gamma^\perp\\
&\Leftrightarrow\quad \widehat{A}_\Gamma\left(x\right)\left(u,v\right)=0 \text{ für alle } u\neq v\in\Gamma^\perp,
\end{aligned}$$

für alle $f\in l^2\left(\mathbb{Z}^n\right)$ und für fast alle $x\in\widehat{R}$. Die Abbildung A ist also genau dann $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant, wenn $\widehat{A}_\Gamma\left(x\right)$ für fast alle $x\in\widehat{R}$ diagonal ist. $\square$

10 Anwendung: Kanaloperatoren

Dieses Kapitel befasst sich mit einer Anwendung der im letzten Kapitel bestimmten Darstellungen in der Signal- und Bildverarbeitung. Hier wird zu Beginn nur ein sehr kleiner Überblick über die Grundlagen der Signalübertragung gegebenen. Eine Einführung in das Thema der Signalübertragung findet sich beispielsweise in [8].

Signale werden vor ihrer Verarbeitung gefiltert und die Abtastrate wird reduziert (Analyseschritt). Nach der Verarbeitung wird die Abtastrate dann wieder erhöht und es findet wiederrum eine Filterung statt (Syntheseschritt). Die Verminderung und Erhöhung der Abtastrate geschieht durch sogenannte Sampling-Operatoren und die Arten der Filterungen sind von der jeweiligen Anwendung abhängig. Durchläuft ein Signal ein Filter, so wird dies mathematisch als Faltung des Signals mit der Impulsantwort des Filters aufgefasst.

In diesem Kapitel werden vereinfachte Kanaloperatoren betrachtet. Sie bestehen aus zwei Filter, dem Analysefilter und dem Synthesefilter, sowie zwei Samplingoperatoren zwischen den Filtern. Ein eingehendes Signal wird zunächst durch das Analysefilter gefiltert, dann erfolgen die Abtastungen, bevor es schließlich das Synthesefilter durchläuft. Der in der Anwendung stattfindende Verarbeitungsschritt wird vernachlässigt. Im Allgemeinen durchläuft ein Signal nicht nur einen Kanaloperator, sondern eine Filterbank. Sie besteht aus beliebig vielen Kanaloperatoren, welche alle auf das Eingangssignal angewandt werden und deren Ausgangssignale schließlich zu einem Ausgangssignal addiert werden. Hier stellt sich beispielsweise die Frage, welche Bedingungen die in den Kanaloperatoren auftretenden Filter erfüllen müssen, damit alle Ausgangssignale einer Filterbank mit ihren Eingangssignalen übereinstimmen. Erfüllt eine Filterbank diese Bedingung, so spricht man von perfekter Rekonstruktion (PR). Dieser Frage wird in den Abschnitten 10.1 und 10.2 nachgegangen.

In den letzten Abschnitten 10.3, 10.4 und 10.5 werden dann Kanaloperatoren K betrachtet, die nicht $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant sind. Interessant ist hier zum einen die Frage, wie die Norm des Residuums $[K, T_l]$ bestimmt werden kann und zum andere, wie diese Norm unter gewissen Voraussetzungen abgeschätzt werden kann. An dieser Stelle kommen orthogonale Filterbänke ins Spiel. Im gesamten Kapitel ist das in Abschnitt 9.3 vorgestellte Matrixkalkül ein wichtiges Hilfsmittel.

Wie in den vorherigen Kapiteln sei $\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ eine Untergruppe mit endlichem Index und

$$\Gamma^\perp = \left\{ z \in \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{T}^n;\ e^{i\langle z,\gamma\rangle} = 1 \text{ für alle } \gamma \in \Gamma \right\}$$

der Annihilator von Γ in $\widehat{\mathbb{Z}^n}$. Außerdem sei R ein Repräsentantensystem modulo Γ und $\widehat{R}$ ein Repräsentantensystem modulo $\Gamma^\perp$, wobei $\widehat{R}$ Borel-messbar sei, vgl. [2, Proposition I.3.2].

Zu Beginn werden zwei Sampling-Operatoren definiert.

(10.1) Definition (Upsampling, Downsampling)
Mit $\uparrow_\Gamma$ wird der *Upsampling-Operator* $\uparrow_\Gamma$: $l^2(\Gamma) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$

$$(\uparrow_\Gamma f)(k) = \begin{cases} f(k), & \text{falls } k \in \Gamma, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

bezeichnet. Mit $\downarrow_\Gamma$ wird der *Downsampling-Operator* $\downarrow_\Gamma$: $l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\Gamma)$,

$$(\downarrow_\Gamma f)(\gamma) = f(\gamma),$$

bezeichnet; er schränkt jedes $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ auf Γ ein.

(10.2) Bemerkungen

a) Es gilt $\uparrow_\Gamma = \downarrow_\Gamma^*$, wobei $\cdot^*$ den adjungierten Operator bezeichnet. Es sei $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und $g \in l^2(\Gamma)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle f, \uparrow_\Gamma g\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)\,\overline{(\uparrow_\Gamma g)(k)} = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\,\overline{g(\gamma)} \\ &= \sum_{\gamma\in\Gamma} (\downarrow_\Gamma f)(\gamma)\,\overline{g(\gamma)} = \langle \downarrow_\Gamma f, g\rangle_{l^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

b) Offensichtlich gilt $(\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(f) = \mathbb{1}_\Gamma \cdot f$ für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, wobei $\mathbb{1}_\Gamma$ die charakteristische Funktion von Γ ist, vgl. Lemma 5.13.

c) Bei der Abbildung $P = \uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ handelt es sich um einen orthogonalen Projektor, das heißt es gilt insbesondere $\|P\|_{\mathrm{op}} = 1$. Dass es sich um einen Projektor handelt, ist direkt aus Teil b) ersichtlich. Sind $f, g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, so folgt aus a)

$$\begin{aligned} \langle Pf, g\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} &= \langle \downarrow_\Gamma f, \uparrow_\Gamma^* g\rangle_{l^2(\Gamma)} = \langle \downarrow_\Gamma f, \downarrow_\Gamma g\rangle_{l^2(\Gamma)} \\ &= \langle f, \downarrow_\Gamma^* \downarrow_\Gamma g\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \langle f, Pg\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)}, \end{aligned}$$

also ist $\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma$ ein symmetrischer Projektor und für $f \in \operatorname{Bild}(P)$ und $g \in \operatorname{Kern}(P)$ gilt

$$\langle f, g\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \langle Pf, g\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \langle f, Pg\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = 0,$$

also ist P orthogonal. Es gilt $P \not\equiv 0$, also $\|P\|_{\mathrm{op}} = 1$.

(10.3) Definition (Kanaloperator)
Für $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ wird der *Kanaloperator* $K : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$,

$$\begin{aligned} Kf &:= g * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h * f)) = g * (\mathbb{1}_\Gamma \cdot (h * f)) \\ &= \left(C_g \circ (\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma) \circ C_h\right)(f), \end{aligned}$$

definiert. Die Folgen h und g heißen *Analysefilter* und *Synthesefilter*. Die Operatoren

$$S(\mathbb{Z}^n) \ni f \mapsto \downarrow_\Gamma (h * f) \in l^2(\Gamma) \quad \text{und} \quad l^2(\Gamma) \ni f \mapsto g * (\uparrow_\Gamma f) \in S'(\mathbb{Z}^n)$$

werden *Analyse-Operator* und *Synthese-Operator* genannt.

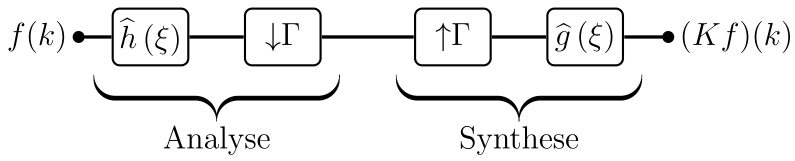

Abbildung 1: Kanaloperator

Aus der Definition des Kanaloperators ist nicht direkt zu erkennen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist. Gleiches gilt für die Analyse- und Synthese-Operatoren.

(10.4) Bemerkung
Bei dem soeben definierten Kanaloperator K handelt es sich um eine wohldefinierte Abbildung. Ist $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ beliebig, so gilt $f \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ nach Lemma 3.6 a). Dann folgt $h * f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ sowie $\|h * f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \leq \|h\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \|f\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}$ nach der Youngschen Ungleichung A.10. Die Abbildung $\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma$ ist nach Bemerkung 10.2 c) ein orthogonaler Projektor, es gilt also $\| \uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma \|_{\mathrm{op}} = 1$. Damit folgt für den Kanaloperator K mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned}
|(Kf)(l)| &= \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} g(m) \left(\left(\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma \right) (h * f) \right)(l - m) \right| \\
&\leq \|g\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \| \left(\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma \right) (h * f) \|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \leq \|g\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \|h * f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \\
&\leq \|g\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \|h\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \|f\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)} < \infty,
\end{aligned}$$

also ist Kf ein Element von $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$. Nach Lemma 4.7 gilt dann $Kf \in S'(\mathbb{Z}^n)$, wenn man die Folge Kf mit ihrem zugehörigen Funktional identifiziert.

(10.5) Lemma
Der Kanaloperator $K : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ ist linear, stetig und Γ-invariant.

Beweis
Die Abbildungen C_g und C_h sowie $\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma$ sind linear, also ist der Kanaloperator K linear.

Um die Stetigkeit des Kanaloperators zu zeigen, sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset S(\mathbb{Z}^n)$ eine Folge, die in $S(\mathbb{Z}^n)$ gegen Null konvergiert. Dann ist die Folge ebenso in $l^1(\mathbb{Z}^n)$ eine Nullfolge, vgl. Lemma 3.6 a). Nach Bemerkung 10.4 gilt

$$|(Kf_k)(l) - (Kf)(l)| \leq \|g\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \|h\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \|f_k\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

also konvergiert die Folge $(Kf_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $l^\infty(\mathbb{Z}^n)$ gegen Kf und für die zugehörigen Funktionale folgt die Konvergenz in $S'(\mathbb{Z}^n)$ aus Lemma 4.7.

Schließlich wird die Γ-Invarianz des Operators K gezeigt. Da nach der Youngschen Ungleichung A.10 für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und $h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ das Faltungsprodukt von h mit f in $l^2(\mathbb{Z}^n)$

liegt, gilt $h * f = f * h$. Sei $\gamma \in \Gamma$ beliebig, dann folgt mit Bemerkung 5.14

$$\begin{aligned}
(T_\gamma K f)(k) &= (Kf)(k-\gamma) = (g * (\mathbb{1}_\Gamma \cdot (f * h)))(k-\gamma) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} g(l)\,(\mathbb{1}_\Gamma \cdot (f*h))(k-\gamma-l) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} g(l)\,\mathbb{1}_\Gamma(k-\gamma-l)\,(f*h)(k-\gamma-l) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} g(l)\,\mathbb{1}_\Gamma(k-l)\,f(m)\,h(k-\gamma-l-m) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} g(l)\,\mathbb{1}_\Gamma(k-l)\,f(m-\gamma)\,h(k-l-m) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} g(l)\,\mathbb{1}_\Gamma(k-l)\,(T_\gamma f)(m)\,h(k-l-m) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} g(l)\,\mathbb{1}_\Gamma(k-l)\,((T_\gamma f)*h)(k-l) \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} g(l)\,(\mathbb{1}_\Gamma \cdot ((T_\gamma f)*h))(k-l) \\
&= (g * (\mathbb{1}_\Gamma \cdot (T_\gamma f * h)))(k) \\
&= (K T_\gamma f)(k)
\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^n$, also ist der Kanaloperator K Γ-invariant. □

(10.6) Satz
Für den Kanaloperator $K : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n), f \mapsto g * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h * f))$, gilt

$$\widehat{Kf}(\xi) = |\Gamma^\perp|^{-1} \widehat{g}(\xi) \cdot \sum_{z \in \Gamma^\perp} \widehat{h}(\xi+z)\,\widehat{f}(\xi+z)$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$, wobei die Fouriertransformierte von Kf in $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ liegt und mit dem zugehörigen Funktional auf $\mathbb{T}^n$ identifiziert wird. Insbesondere gilt

$$\left(\widehat{Kf}\right)_\Gamma(x) = \widehat{K}_\Gamma(x) \cdot \widehat{f}_\Gamma(x)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ mit

$$\widehat{K}_\Gamma(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} \cdot \widehat{g}_\Gamma(x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma}(x).$$

Beweis
Für $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt $h * f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ nach der Youngschen Ungleichung A.10. Es folgt

$$(\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h*f) \in l^2(\mathbb{Z}^n)$$

und mit Satz 6.8

$$\widehat{Kf} = (g * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h*f)))^\wedge \in L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}).$$

Dann gilt für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ mit Satz 6.8, Bemerkung 5.36 und Korollar 5.17

$$\begin{aligned}
\widehat{Kf}(\xi) &= (g * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h*f)))^\wedge(\xi) = \widehat{g}(\xi) \cdot ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h*f))^\wedge(\xi) \\
&= \widehat{g}(\xi) \cdot (\mathbb{1}_\Gamma \cdot (h*f))^\wedge(\xi) = |\Gamma^\perp|^{-1} \widehat{g}(\xi) \sum_{z \in \Gamma^\perp} \widehat{h}(\xi+z)\,\widehat{f}(\xi+z).
\end{aligned}$$

Daraus folgt für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{Kf}\right)_\Gamma(x) &= \left(\widehat{Kf}\,(x+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp} \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\widehat{g}\,(x+w)\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{h}\,(x+w+z)\,\widehat{f}\,(x+w+z)\right)_{w\in\Gamma^\perp} \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{h}\,(x+z)\,\widehat{f}\,(x+z)\,\widehat{g}\,(x+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp} \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\widehat{g}_\Gamma\,(x)\otimes\overline{\widehat{h}_\Gamma}\,(x)\right)\cdot\widehat{f}_\Gamma\,(x),
\end{aligned}
$$

also $\left(\widehat{Kf}\right)_\Gamma(x) = \widehat{K}_\Gamma\,(x)\cdot\widehat{f}_\Gamma\,(x)$ fast überall mit $\widehat{K}_\Gamma\,(x) = |\Gamma^\perp|^{-1}\cdot\widehat{g}_\Gamma\,(x)\otimes\overline{\widehat{h}_\Gamma}\,(x)$. $\square$

Wie bereits erwähnt wurde, wird selten nur ein Kanaloperator bei der Verarbeitung eines Signals verwendet. Im Allgemeinen durchläuft ein Signal eine Filterbank. Sie besteht aus mehreren Kanaloperatoren, welche auf das Signal angewandt werden und deren Summe dann das Ausgangssignal bildet.

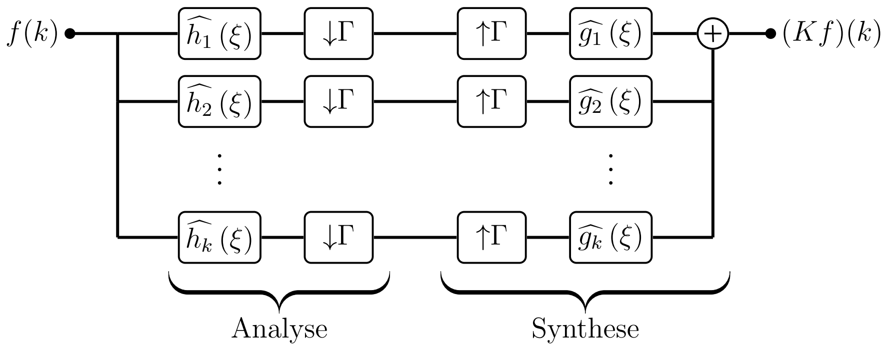

Abbildung 2: k-Kanal-Filterbank $K = \sum_{i=1}^k K_i$

(10.7) Definition

Sind $g_i, h_i \in l^2(\mathbb{Z}^n), 1 \le i \le k$, gegeben und $K_i : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ die zugehörigen Kanaloperatoren, das heißt

$$K_i f = g_i * \left((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)\,(h_i * f)\right),$$

so heißt $K := \sum_{i=1}^k K_i$ die zu den Filter g_i und $h_i, 1 \le i \le k$, gehörige *Filterbank*. Die Filter $h_i, 1 \le i \le k$, heißen *Analysefilter* und die Filter $g_i, 1 \le i \le k$, *Synthesefilter*. Die Operatoren

$$T : S(\mathbb{Z}^n) \ni f \mapsto \left(\downarrow_\Gamma\,(h_i * f)\right)_{1\le i\le k} \in l^2\,(\Gamma)^k$$

und

$$S : l^2\,(\Gamma)^k \ni f = (f_i)_{i=1,\dots,k} \mapsto \sum_{i=1}^k \left(g_i * (\uparrow_\Gamma f_i)\right) \in S'(\mathbb{Z}^n)$$

werden *Analyse-Operator* und *Synthese-Operator* genannt. Es gilt $K = S \circ T$.

Im Folgenden wird eine Filterbank K auch mit $(K_i)_{i=1,\ldots,k}$ oder $(g_i, h_i)_{i=1,\ldots,k}$ bezeichnet, um die Abhängigkeit von den Kanaloperatoren oder den Filtern zu verdeutlichen.

Für den Rest des Abschnitts seien die Folgen $g_i, h_i \in l^2(\mathbb{Z}^n), 1 \le i \le k$, gegeben sowie die zugehörigen Kanaloperatoren

$$K_i : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n),\ K_i f = g_i * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h_i * f)).$$

(10.8) Bemerkung
Aus Lemma 10.5 folgt, dass die Filterbank $K = \sum_{i=1}^k K_i : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ linear, stetig und Γ-invariant ist.

Die Fouriertransformation ist eine lineare Abbildung, also lässt sich auf direktem Wege die Fouriertransformierte einer Filterbank bestimmen.

(10.9) Lemma
Für die Filterbank $K := \sum_{i=1}^k K_i : S(\mathbb{Z}^n) \to S'(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\widehat{Kf}(\xi) = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{i=1}^k \widehat{g_i}(\xi) \cdot \sum_{z \in \Gamma^\perp} \widehat{h_i}(\xi + z)\, \widehat{f}(\xi + z)$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$, wobei die Fouriertransformierte von Kf in $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ liegt und mit dem zugehörigen Funktional auf $\mathbb{T}^n$ identifiziert wird. Insbesondere gilt

$$\left(\widehat{Kf}\right)_\Gamma(x) = \widehat{K}_\Gamma(x) \cdot \widehat{f}_\Gamma(x)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ mit

$$\widehat{K}_\Gamma(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{i=1}^k \widehat{g}_{i,\Gamma}(x) \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x).$$

Beweis
Die Fouriertransformation auf $S'(\mathbb{Z}^n)$ ist linear, somit folgt alles aus Satz 10.6. □

Die folgende Bemerkung macht nun eine Aussage über die Matrixdarstellung auf der Fourierseite eines Kanaloperators, der auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ stetig ist.

(10.10) Bemerkung
Ist der Kanaloperator $K : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), f \mapsto g * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h * f)), g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, stetig, so gilt

$$\left(\widehat{Kf}\right)_\Gamma(x) = \widehat{K}_\Gamma(x) \cdot \widehat{f}_\Gamma(x)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ mit

$$\widehat{K}_\Gamma(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} \cdot \widehat{g}_\Gamma(x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma}(x).$$

Dies folgt aus Satz 10.6 und Lemma 9.17.

Mit Hilfe der Matrixdarstellung der Fouriertransformierten eines stetigen Kanaloperators K auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ kann eine Aussage darüber getroffen werden, unter welchen Voraussetzungen an die Filter der Operator nicht $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant ist.

(10.11) Lemma
Es gelte $\Gamma \subsetneq \mathbb{Z}^n$. Haben die Folgen $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n), g, h \not\equiv 0$, stetige Fouriertransformierte $\widehat{g}, \widehat{h}$ und ist der zugehörige Kanaloperator $K : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ stetig, so ist K nicht $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant.

Beweis
Angenommen der Kanaloperator K ist $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant. Dann folgt aus Lemma 9.28, dass $\widehat{K}_\Gamma(x)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ diagonal ist. Es gilt nach Bemerkung 10.10 für $u, v \in \Gamma^\perp$

$$\widehat{K}_\Gamma(x)(u, v) = |\Gamma^\perp|^{-1}\widehat{g}(x+u)\,\widehat{h}(x+v),$$

also insbesondere für $u \neq v \in \Gamma^\perp$ und fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\widehat{g}(x+u)\,\widehat{h}(x+v) = 0.$$

Seien nun $u, v \in \Gamma^\perp, u \neq v$ beliebig, aber fest. Die Abbildung $x \mapsto \widehat{g}(x+u)\,\widehat{h}(x+v)$ ist stetig nach Voraussetzung, also gilt $\widehat{g}(x+u)\,\widehat{h}(x+v) = 0$ für alle $x \in \widehat{R}$ und somit $\widehat{g}(x+u)\,\widehat{h}(x+v) = 0$ für alle $x \in \widehat{R}$ und alle $u, v \in \Gamma^\perp$ mit $u \neq v$. Aufgrund der Stetigkeit folgt aber dann

$$\widehat{g}(x+u)\,\widehat{h}(x+v) = 0$$

für alle $x \in \widehat{R}$ und alle $u, v \in \Gamma^\perp$. Dann ist allerdings $\widehat{K}_\Gamma(x) \equiv 0$ und somit $K \equiv 0$. Das bedeutet aber $g \equiv 0$ oder $h \equiv 0$ und ist somit ein Widerspruch zur Voraussetzung. Der Kanaloperator K ist also nicht $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant. $\square$

(10.12) Bemerkungen

a) Ein Beispiel für Filter, so dass die Voraussetzungen in Lemma 10.11 erfüllt sind, sind $g, h \in F(\mathbb{Z}^n), g, h \not\equiv 0$. Es gilt $F(\mathbb{Z}^n) \subset S(\mathbb{Z}^n) \subset l^1(\mathbb{Z}^n)$, also $\widehat{g}, \widehat{h} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^n)$ nach Satz 5.24. Für $g \in F(\mathbb{Z}^n)$ und $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ gilt $g * f = f * g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ sowie die Abschätzung $\|g * f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \leq \|g\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}\|f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)}$ nach der Youngschen Ungleichung A.10. Gleiches gilt auch für die Faltung von h mit f. Damit folgt für $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ mit Bemerkung 10.2 c)

$$\begin{aligned}\|Kf\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} &= \|g * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h * f))\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \leq \|g\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}\|(\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h * f)\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \\ &= \|g\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}\|h * f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \leq \|g\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}\|h\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)}\|f\|_{l^2(\mathbb{Z}^n)},\end{aligned}$$

also ist der Kanaloperator $K : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ stetig.

b) Lemma 10.11 gilt nicht im Fall $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. In diesem Fall handelt es sich bei $\widehat{K}_\Gamma(x), x \in \widehat{R}$, um eine 1×1 Matrix, die natürlich diagonal ist. Es folgt aus Lemma 9.28, dass der Kanaloperator unabhängig von den Eigenschaften der Filter $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant ist. Ein konkretes Beispiel, das zeigt, dass Lemma 10.11 im Fall $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ nicht gilt, ist das Folgende.

Es seien $k, l \in \mathbb{Z}^n, k \neq l$, sowie $g = \delta_k$ und $h = \delta_l$. Dann folgt aus Beispiel 5.20, dass die Fouriertransformierten von g und h stetig sind. Nach a) ist der zugehörige Kanaloperator K stetig auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ und für alle $m \in \mathbb{Z}^n$ und beliebige $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}(Kf)(m) &= (\delta_k * ((\uparrow_{\mathbb{Z}^n} \circ \downarrow_{\mathbb{Z}^n})(\delta_l * f)))(m) = (\delta_k * (\delta_l * f))(m) \\ &= (\delta_l * f)(m-k) = f(m-l-k)\,.\end{aligned}$$

Ist nun $j \in \mathbb{Z}^n$ beliebig, so gilt

$$\left(T_j K f\right)(m) = f(m-j-l-k) = \left(T_j f\right)(m-l-k) = \left(K T_j f\right)(m)$$

für alle $m \in \mathbb{Z}^n$, also ist der Kanaloperator K unter den Voraussetzungen von Lemma 10.12 $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant.

c) Unter den Voraussetzungen von Lemma 10.11 gibt es mindestens ein $l \in \mathbb{Z}^n$, so dass für die Kommutatornorm $\|\,[K, T_l]\,\|_{\mathrm{op}} \neq 0$ gilt.

Schließlich wird nun eine notwendige Bedingung für die Stetigkeit des Kanaloperators auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ angegeben.

(10.13) Lemma
Für die Filter $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ sei der zugehörige Kanaloperator $K : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ stetig. Dann ist die Abbildung $\widehat{R} \ni x \mapsto \|\widehat{g}_\Gamma(x)\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \|\widehat{h}_\Gamma(x)\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}$ ein Element von $L^\infty\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$.

Beweis
Nach Bemerkung 10.10 und Lemma 9.11 gilt

$$\widehat{K}_\Gamma^*(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} \cdot \overline{\widehat{h}_\Gamma}(x) \otimes \widehat{g}_\Gamma(x)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$. Der Operator K ist nach Voraussetzung stetig auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$, Satz 9.18 liefert also

$$\|K\|_{\mathrm{op}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \widehat{R}} \|\widehat{K}_\Gamma(x)\|_{\mathrm{op}} < \infty.$$

Es folgt mit der Frobeniusnorm für eine Konstante $c > 0$

$$\begin{aligned}\|\widehat{K}_\Gamma(x)\|_{\mathrm{op}} &\geq c\sqrt{\operatorname{Spur}\left(\widehat{K}_\Gamma^*(x)\,\widehat{K}_\Gamma(x)\right)} \\ &= c|\Gamma^\perp|^{-1}\sqrt{\sum_{v\in\Gamma^\perp}\left(\overline{\widehat{h}_\Gamma}(x)\otimes\widehat{g}_\Gamma(x)\right)\left(\widehat{g}_\Gamma(x)\otimes\overline{\widehat{h}_\Gamma}(x)\right)(v,v)} \\ &= c|\Gamma^\perp|^{-1}\sqrt{\sum_{v\in\Gamma^\perp}\sum_{w\in\Gamma^\perp}\overline{\widehat{h}(x+v)}\,\overline{\widehat{g}(x+w)}\,\widehat{g}(x+w)\,\widehat{h}(x+v)}\end{aligned}$$

$$= c|\Gamma^\perp|^{-1}\sqrt{\sum_{w\in\Gamma^\perp}|\widehat{g}\,(x+w)|^2}\sqrt{\sum_{v\in\Gamma^\perp}|\widehat{h}\,(x+v)|^2}$$
$$= c|\Gamma^\perp|^{-1}\|\widehat{g}_\Gamma\,(x)\,\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\|\widehat{h}_\Gamma\,(x)\,\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}$$

und damit

$$\infty > \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}}\|\widehat{K}_\Gamma\,(x)\,\|_{\mathrm{op}} \geq C \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}}\|\widehat{g}_\Gamma\,(x)\,\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\|\widehat{h}_\Gamma\,(x)\,\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}$$

für eine Konstante $C > 0$. Es gilt also $x \mapsto \|\widehat{g}_\Gamma\,(x)\,\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\|\widehat{h}_\Gamma\,(x)\,\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \in L^\infty\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big)$. □

10.1 Perfekte Rekonstruktion

Wie schon zu Beginn des Kapitels erwähnt wurde, spielt die perfekte Rekonstruktion in der Signal- und Bildverarbeitung eine wichtige Rolle.

Die Folgen $g_i, h_i \in l^2\,(\mathbb{Z}^n), 1 \leq i \leq k$ seien so gewählt, dass die zugehörigen Kanaloperatoren

$$K_i : l^2\,(\mathbb{Z}^n) \to l^2\,(\mathbb{Z}^n),\; K_i f = g_i * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)\,(h_i * f))\,,$$

wohldefiniert sind.

Es folgt die mathematische Definition der perfekten Rekonstruktion.

(10.14) Definition (perfekte Rekonstruktion (PR))
Die Filterbank $K = \sum_{i=1}^k K_i$ *rekonstruiert perfekt*, wenn $K = \mathrm{Id}$ gilt. Die Filterbank wird *PR-Filterbank* genannt.

(10.15) Bemerkung
Ist $K = \sum_{i=1}^k K_i$ eine PR-Filterbank, so ist K $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant. Für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ gilt $Kf = f$ und somit $K\,(T_l f) = T_l f = T_l\,(Kf)$ für alle $l \in \mathbb{Z}^n$.

Im Folgenden sei die zu g_i und h_i gehörigen Kanaloperatoren $K_i : l^2\,(\mathbb{Z}^n) \to l^2\,(\mathbb{Z}^n)$ stetig. Da die Filterbank K durch die Filter $g_i, h_i \in l^2\,(\mathbb{Z}^n), 1 \leq i \leq k$, bestimmt wird, lässt sich die PR-Bedingung an eine Filterbank auch durch eine PR-Bedingung an die Filter ausdrücken.

(10.16) Satz
Die Filterbank $(K_i)_{i=1,\ldots,k}$ ist genau dann eine PR-Filterbank, wenn

$$\sum_{i=1}^k \widehat{g}_i\,(x+v)\,\widehat{h_i}\,(x+w) = \begin{cases} |\Gamma^\perp|, & \text{falls } v = w, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{16}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ erfüllt ist. In Matrixschreibweise ergibt sich für die Gleichung in (16)

$$|\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{i=1}^k \widehat{g}_{i,\Gamma}\,(x) \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x) = \mathrm{Id}\,.$$

Beweis
Da die Fouriertransformation nach dem Satz von Plancherel 5.8 auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ bijektiv ist, folgt mit Lemma 9.14, Bemerkung 10.10 und Lemma 10.9 für beliebiges $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\begin{aligned}
& Kf = f \\
\Leftrightarrow\quad & \widehat{Kf}\,(x+w) = \widehat{f}\,(x+w) \text{ für alle } w \in \Gamma^\perp \\
\Leftrightarrow\quad & \left(\widehat{Kf}\right)_\Gamma(x) = \widehat{f}_\Gamma(x) \\
\Leftrightarrow\quad & \widehat{K}_\Gamma(x) = \mathrm{Id} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^k \widehat{g}_{i,\Gamma}(x)\,\widehat{h}_{i,\Gamma}(x)^T = |\Gamma^\perp| \cdot \mathrm{Id} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^k \left(\widehat{g}_i(x+v)\,\widehat{h}_i(x+w)\right)_{(v,w)\in\Gamma^\perp\times\Gamma^\perp} = |\Gamma^\perp| \cdot \mathrm{Id} \\
\Leftrightarrow\quad & \sum_{i=1}^k \widehat{g}_i(x+v)\,\widehat{h}_i(x+w) = \begin{cases} |\Gamma^\perp|, & \text{falls } v=w, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

(10.17) Bemerkung
Die PR-Bedingung an eine Filterbank lässt sich auch über die $w_z, z \in \Gamma^\perp$, aus Satz 9.7 ausdrücken. Ist $K = (K_i)_{i=1,\ldots,k} : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ eine stetige Filterbank, so gilt, vgl. Bemerkung 9.22, $w_z \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ für alle $z \in \Gamma^\perp$ und nach Satz 9.7 gilt

$$(Kf)^{\widehat{}}\,(\xi) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} w_z(\xi) \cdot T_z\widehat{f}(\xi)\,,\ f \in l^2(\mathbb{Z}^n),$$

für alle $f \in S(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$. Analog zum Beweis von Lemma 9.17 kann diese Aussage für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ übertragen werden, da die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ nach dem Satz von Plancherel 5.8 stetig ist. Die Filterbank K rekonstruiert also genau dann perfekt, wenn $w_z \equiv 1$ für $z = 0$ gilt und $w_z \equiv 0$ für alle $z \neq 0$ erfüllt ist.

Bisher wurde keine Aussage darüber getroffen, wie viele Kanaloperatoren mindestens benötigt werden, damit eine Filterbank perfekt rekonstruieren kann. Dies geschieht im folgenden Korollar.

(10.18) Korollar
Ist $(K_i)_{i=1,\ldots,k}$ eine PR-Filterbank, so gilt $k \geq |\Gamma^\perp|$.

Beweis
Es gelte $K := \sum_{i=1}^k K_i = \mathrm{Id}$. Nach Satz 10.16 erfüllen die Folgen $g_i, h_i \in l^2(\mathbb{Z}^n), 1 \leq i \leq k$, die Bedingung

$$\sum_{i=1}^k \widehat{g}_i(x+v)\,\widehat{h}_i(x+w) = \begin{cases} |\Gamma^\perp|, & \text{falls } v=w, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, w \in \Gamma^\perp$. Werden für $x \in \widehat{R}$ die Matrizen

$$A(x) := \left(\widehat{g_i}\,(x+z)\right)_{(z,i)\in\Gamma^\perp\times\{1,\ldots,k\}} \quad \text{und} \quad B(x) := \left(\widehat{h_i}\,(x+z)\,\right)_{(i,z)\in\{1,\ldots,k\}\times\Gamma^\perp},$$

definiert, so folgt für $v, w \in \Gamma^\perp$

$$\begin{aligned}(A(x)\cdot B(x))\,(v,w) &= \sum_{j=1}^{k} \left(\widehat{g_i}\,(x+z)\right)(v,j)\left(\widehat{h_i}\,(x+z)\right)(j,w)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \widehat{g_j}\,(x+v)\,\widehat{h_j}\,(x+w)\,,\end{aligned}$$

also gilt $A(x)\cdot B(x) = |\Gamma^\perp|\cdot \mathrm{Id}$ fast überall nach Voraussetzung. Es gilt

$$\mathrm{Rang}(A) \le \min\left(|\Gamma^\perp|, k\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{Rang}(B) \le \min\left(|\Gamma^\perp|, k\right)$$

und somit folgt

$$\begin{aligned}|\Gamma^\perp| &= \mathrm{Rang}(|\Gamma^\perp|\cdot \mathrm{Id}) = \mathrm{Rang}(A(x)\cdot B(x)) \le \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))\\ &\le \min\left(|\Gamma^\perp|, k\right) \le k.\end{aligned}$$ □

(10.19) Bemerkung
Korollar 10.18 kann auch auf eine andere Weise bewiesen werde. Für einen Kanaloperator K_i gilt

$$\left(\widehat{K_i}\right)_\Gamma(x) = |\Gamma^\perp|^{-1}\widehat{g}_{i,\Gamma}\,(x)\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x) = |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\widehat{g_i}\,(x+u)\,\widehat{h_i}\,(x+v)\right)_{(u,v)\in\Gamma^\perp\times\Gamma^\perp}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$, die Matrix hat also höchstens Rang 1. Ist die Filterbank $(K_i)_{i=1,\ldots,k}$ eine PR-Filterbank, so gilt $\widehat{K}_\Gamma\,(x) = \sum_{i=1}^{k}\left(\widehat{K_i}\right)_\Gamma(x) = \mathrm{Id}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$. Da $\mathrm{Rang}(\mathrm{Id}) = |\Gamma^\perp|$ gilt, muss somit $k \ge |\Gamma^\perp|$ erfüllt sein.

10.2 Zueinander duale Gabor-Fenster

In diesem Teilabschnitt werden konkrete Analyse- und Synthesefilter betrachtet, die durch Anwendung eines Modulationsoperators entstehen. Wie im vorherigen Abschnitt seien die Filter $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ so gewählt, dass die in diesem Abschnitt definierten Kanaloperatoren stetige Abbildungen auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ sind.

(10.20) Definition (Gabor-Frame)
Für $g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, $v \in \Gamma^\perp$ und $\gamma \in \Gamma$ wird $g_{v,\gamma} := T_\gamma M_v g$ definiert. Das System

$$\{g_{v,\gamma}\ ;\ \gamma \in \Gamma, v \in \Gamma^\perp\}$$

heißt *Gabor-Frame*. Für $g \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ wird die abkürzende Schreibweise $g_v := M_v g$ verwendet.

(10.21) Definition (Gabor-Frame-Operator)
Für $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ wird die Abbildung

$$A : l^2(\mathbb{Z}^n) \ni f \mapsto \sum_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle f, h_{v,\gamma} \rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \, g_{v,\gamma}$$

Gabor-Frame-Operator genannt.

Den Zusammenhang zwischen Gabor-Frame-Operatoren und Filterbänken liefert das folgende Lemma

(10.22) Lemma
Für $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ sei $K_v, v \in \Gamma^\perp$, der Kanaloperator zu den Filtern g_v, h_v^*. Dabei wird $h_v^*(k) := \overline{h_v}(-k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}^n$ definiert. Dann handelt es sich bei der zu den Kanälen $K_v, v \in \Gamma^\perp$, gehörigen Filterbank K um einen Gabor-Frame-Operator.

Beweis
Es gilt für beliebige $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und alle $m \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned}
(Kf)(m) &= \sum_{v \in \Gamma^\perp} (K_v f)(m) \\
&= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} g_v(j) \, \mathbb{1}_\Gamma (m - j) \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} h_v^*(l) \, f(m - j - l) \\
&= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} g_v(m - \gamma) \, h_v^*(l) \, f(\gamma - l) \\
&= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} g_{v,\gamma}(m) \, \overline{h_v}(-l) \, f(\gamma - l) \\
&= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g_{v,\gamma}(m) \, \overline{h_v}(k - \gamma) \, f(\gamma - k - \gamma) \\
&= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{\gamma \in \Gamma} g_{v,\gamma}(m) \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \overline{h_{v,\gamma}}(k) \, f(k) \\
&= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle f, h_{v,\gamma} \rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \, g_{v,\gamma}(m) \, .
\end{aligned}$$

Nach Definition 10.21 handelt es sich also bei der Filterbank K um einen Gabor-Frame-Operator. □

(10.23) Definition (zueinander duale Gaborfenster)
Die Folgen $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ werden *zueinander duale Gaborfenster* genannt, wenn es sich bei der in Lemma 10.22 definierten Filterbank K um eine PR-Filterbank handelt.

Im nun folgenden Korollar wird Satz 10.16 an die in diesem Abschnitt gegebenen Filter $(g_v)_{v \in \Gamma^\perp}$ und $(h_v^*)_{v \in \Gamma^\perp}$ angepasst.

(10.24) Korollar
Bei zwei Filtern $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ handelt es sich genau dann um ein zueinander duales Gabor-Fenster, wenn

$$|\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(\xi - v) \left(T_z \widehat{h^*}\right)(\xi - v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \tag{17}$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ und alle $z \in \Gamma^\perp$ erfüllt ist.

Beweis
Nach Lemma 5.9 d) und c) gilt für alle $u, w \in \Gamma^\perp, z = u - w \in \Gamma^\perp$ und für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g_v}(x + w) \widehat{h_v^*}(x + u) &= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g_v}(x + w) \overline{\widehat{h_v}}(x + u) \\ &= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x + w - v) \overline{\widehat{h}}(x + u - v) \\ &= \sum_{v' \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x - v') \overline{\widehat{h}}(x + u - v' - w) \\ &= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x - v) \overline{\widehat{h}}(x - v + u - w) \\ &= \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x - v) \overline{\widehat{h}}(x - v + z). \end{aligned}$$

Wird für $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ der Kanaloperator $K_v f = g_v * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h_v^* * f))$ betrachtet, so folgt aus Satz 10.16

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in \Gamma^\perp} K_v = \mathrm{Id} \\ \Leftrightarrow \quad & |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g_v}(x + w) \widehat{h_v^*}(x + u) = \begin{cases} 1, & \text{falls } w = u, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x - v) \overline{\widehat{h}}(x - v + z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x - v) \overline{\widehat{h}}(x - v - z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x - v) \left(T_z \overline{\widehat{h}}\right)(x - v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^\perp} \widehat{g}(x - v) \left(T_z \widehat{h^*}\right)(x - v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $u, w \in \Gamma^\perp, z = u - w \in \Gamma^\perp$. Da jedes $\xi \in \mathbb{T}^n$ eine eindeutige

Darstellung $\xi = x + w$ mit $x \in \widehat{R}$ und $w \in \Gamma^\perp$ besitzt, gilt insbesondere

$$\begin{aligned} &\sum_{v\in\Gamma^\perp} K_v = \mathrm{Id} \\ \Leftrightarrow \quad &|\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v\in\Gamma^\perp} \widehat{g}\,(\xi - v) \left(T_z \widehat{h^*}\right)(\xi - v) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ und alle $z \in \Gamma^\perp$. Damit ist die Behauptung gezeigt. □

In [5, 4.2 Gabor systems] wird ein Zusammenhang zwischen perfekter Rekonstruktion und der Wexler-Raz-Bedingung hergestellt. Gleiches soll nun für die Filter g und h geschehen.

(10.25) Satz (Wexler-Raz-Bedingung)
Die Filter g und h seien Elemente von $l^1(\mathbb{Z}^n) \cap l^2(\mathbb{Z}^n)$. Dann sind äquivalent:

(i) Es handelt sich bei g und h um zueinander duale Gabor-Fenster.

(ii) Für alle $\gamma \in \Gamma$ und alle $z \in \Gamma^\perp$ gilt

$$\langle g, T_\gamma M_z h\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \delta_z(0)\,\delta_\gamma(0) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\gamma, z) = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{18}$$

Die Gleichung in (18) wird *Wexler-Raz-Bedingung* genannt.

Beweis
Nach Voraussetzung sind $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, also ist die Abbildung

$$\xi \mapsto |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v\in\Gamma^\perp} \widehat{g}\,(\xi - v) \left(T_z \widehat{h^*}\right)(\xi - v)$$

nach der Hölder-Ungleichung ein Element von $L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$. Mit $s_z \in L^1(\mathbb{T}^n, \mathbb{C}), z \in \Gamma^\perp$,

$$s_z \equiv \begin{cases} 1, & \text{falls } z = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

kann die Gleichung (17) in Korollar 10.24 in eine Gleichung mit Fourierkoeffizienten umgeschrieben werden. Da g und h_v^* Elemente aus $l^1(\mathbb{Z}^n)$ sind, gilt $g * h_v^* \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ nach der Youngschen Ungleichung A.10, also insbesondere $M_{-\xi}(g * h_v^*) \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ für $\xi \in \mathbb{T}^n$.

Nach diesem Vorbemerkungen wird jetzt die Äquivalenz der Aussagen aus dem Satz mit Hilfe des Lemmas 5.9 c), des Faltungssatzes 6.8, Bemerkung 5.36, der Poissonsche Summenformel 5.15 und des Lemmas 2.9 bewiesen. Die Filter g und h sind genau dann zueinander duale Gaborfenster, wenn

$$\begin{aligned} \delta_z(0)\,\delta_m(0) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} s_z(\xi)\, e^{-i\langle \xi, m\rangle} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{v\in\Gamma^\perp} \widehat{g}\,(\xi - v) \left(T_z \widehat{h^*}\right)(\xi - v)\, e^{-i\langle \xi, m\rangle} d\xi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-n} \, |\Gamma^{\perp}|^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{v \in \Gamma^{\perp}} \left(\widehat{g} \cdot \left(T_z \widehat{h^*} \right) \right) (\xi - v) \, e^{-i\langle \xi, m \rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \, |\Gamma^{\perp}|^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{v \in \Gamma^{\perp}} \left(\widehat{g} \cdot \widehat{h_z^*} \right) (\xi - v) \, e^{-i\langle \xi, m \rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \, |\Gamma^{\perp}|^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{v \in \Gamma^{\perp}} \left(g * h_z^* \right)^{\widehat{}} \, (\xi + v) \, e^{-i\langle \xi, m \rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \, |\Gamma^{\perp}|^{-1} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{v \in \Gamma^{\perp}} \left(M_{-\xi} \left(g * h_z^* \right) \right)^{\widehat{}} \, (v) \, e^{-i\langle \xi, m \rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(M_{-\xi} \left(g * h_z^* \right) \right) (\gamma) \, e^{-i\langle \xi, m \rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(g * h_z^* \right) (\gamma) \, e^{-i\langle \xi, \gamma \rangle} e^{-i\langle \xi, m \rangle} d\xi \\
&= (2\pi)^{-n} \sum_{\gamma \in \Gamma} \left(g * h_z^* \right) (\gamma) \int\limits_{\mathbb{T}^n} e^{-i\langle \xi, \gamma + m \rangle} d\xi \\
&= \begin{cases} \left(g * h_z^* \right) (-m) \, , & \text{falls } m \in \Gamma, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k) \, h_z^*(-m - k) \, , & \text{falls } m \in \Gamma, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k) \, \overline{h_z}(k + m) \, , & \text{falls } m \in \Gamma, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} g(k) \, \overline{h_{z,-m}}(k) \, , & \text{falls } m \in \Gamma, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \langle g, T_{-m} M_z h \rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} \, , & \text{falls } m \in \Gamma, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend handelt es sich bei g und h genau dann um zueinander duale Gaborfenster, wenn

$$
\langle g, T_\gamma M_z h \rangle_{l^2(\mathbb{Z}^n)} = \delta_z(0) \, \delta_{-\gamma}(0) = \delta_z(0) \, \delta_\gamma(0) \qquad \square
$$

für alle $\gamma \in \Gamma$ und alle $z \in \Gamma^{\perp}$ gilt.

10.3 Die Kommutatornorm

Ist ein Kanaloperator K nicht $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant, so existiert mindestens ein $l \in \mathbb{Z}^n$, so dass für das Residuum $[K, T_l]$ gilt $[K, T_l] \not\equiv 0$. In diesem Fall ist die Norm des Residuums, auch Kommutatornorm genannt, von Interesse. Wie diese bestimmt werden kann wird im Folgenden erklärt.

Die Folgen $g, h \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ seien in diesem Abschnitt so gewählt, dass der zugehörige Kanaloperator

$$K : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n),\ Kf = g * ((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h * f)),$$

stetig ist.

Zu Beginn wird für ein beliebiges, aber festes $l \in \mathbb{Z}^n$ die Matrixdarstellung der Fouriertransformierten der Abbildung $[K, T_l]$ bestimmt.

(10.26) Lemma
Für die Abbildung $[K, T_l] : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$ gilt

$$\mathbf{T}(l,x) := [K, T_l]\widehat{\ }_\Gamma(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} e^{-i\langle x,l\rangle} \left[\widehat{g}_\Gamma(x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma}(x), D^{-l}\right],$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ mit $D^{-l} := \operatorname{diag}\left(\left(e^{-i\langle w,l\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp}\right)$.

Beweis
Nach Korollar 9.20, Bemerkung 10.10 und Lemma 9.27 gilt

$$\begin{aligned}
[K, T_l]\widehat{\ }_\Gamma(x) &= (KT_l)\widehat{\ }_\Gamma - (T_lK)\widehat{\ }_\Gamma = \widehat{K}_\Gamma(x)\,\widehat{T}_{l,\Gamma}(x) - \widehat{T}_{l,\Gamma}(x)\,\widehat{K}_\Gamma(x) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} e^{-i\langle x,l\rangle} \left(\left(\widehat{g}_\Gamma(x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma}(x)\right) D^{-l} - D^{-l}\left(\widehat{g}_\Gamma(x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma}(x)\right)\right) \\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} e^{-i\langle x,l\rangle} \left[\left(\widehat{g}_\Gamma(x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma}(x)\right), D^{-l}\right]
\end{aligned}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$. □

Nun wird Satz 9.18 auf den Operator $[K, T_l]$ angewandt.

(10.27) Satz
Es gilt

$$\|\,[K, T_l]\,\|_{\mathrm{op}}^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \|\mathbf{T}(l,x)\,\|_{\mathrm{op}}^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \lambda_{\max}\left(\mathbf{A}(l,x)\right), \tag{19}$$

wobei $\mathbf{A}(l,x) := \mathbf{T}^*(l,x)\,\mathbf{T}(l,x)$ definiert wird.

Beweis
Nach den Voraussetzungen des Abschnitts und Lemma 10.5 ist der Kanaloperator

$$K : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$$

linear, stetig und Γ-invariant. Gleiches gilt nach Lemma 2.3 und Beispiel 8.2 a) für die Abbildung $T_l : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$. Somit ist die Abbildung $[K, T_l] : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n)$

linear, stetig und Γ-invariant. Es sind also die Voraussetzungen für Satz 9.18 erfüllt und es folgt

$$\begin{aligned}\| [K, T_l] \|_{\mathrm{op}}^2 &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \widehat{R}} \| \widehat{[K, T_l]_\Gamma} (x) \|_{\mathrm{op}}^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \widehat{R}} \|\mathbf{T}(l, x) \|_{\mathrm{op}}^2 \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \widehat{R}} \lambda_{\max} \left(\mathbf{T}^*(l, x) \, \mathbf{T}(l, x)\right) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \widehat{R}} \lambda_{\max} \left(\mathbf{A}(l, x)\right),\end{aligned}$$

mit $\mathbf{A}(l, x) := \mathbf{T}^*(l, x) \, \mathbf{T}(l, x)$, wenn für $B \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp \times \Gamma^\perp}$ die Norm $\|B\|_{\mathrm{op}}$ die durch die euklidische Norm induzierte Spektralnorm bezeichnet. □

Es folgen einige Bemerkungen.

(10.28) Bemerkungen

a) Die Matrix $\mathbf{A}(l, x) := \mathbf{T}^*(l, x) \, \mathbf{T}(l, x)$ ist selbstadjungiert, sie besitzt also nur reelle Eigenwerte. Wegen

$$\langle \mathbf{T}^*(l, x) \, \mathbf{T}(l, x) \, w, w \rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \langle \mathbf{T}(l, x) \, w, \mathbf{T}(l, x) \, w \rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \|\mathbf{T}(l, x) \, w\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}^2 \geq 0$$

für alle $w \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ ist die Matrix positiv semi-definit, also sind alle Eigenwerte nichtnegativ.

b) Da die Matrix $\widehat{g}_\Gamma (x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma} (x)$ höchstens Rang 1 hat, vgl. Bemerkung 10.19, gilt

$$\operatorname{Rang} \left(\mathbf{T}(l, x)\right) \leq \operatorname{Rang} \left(\left(\widehat{g}_\Gamma (x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma} (x) \right) D^{-l} \right) + \operatorname{Rang} \left(D^{-l} \left(\widehat{g}_\Gamma (x) \otimes \overline{\widehat{h}_\Gamma} (x) \right) \right) \leq 2$$

und damit $\operatorname{Rang} \left(\mathbf{A}(l, x)\right) \leq 2$. Die Matrix $\mathbf{A}(l, x)$ hat also höchstens zwei Eigenwerte ungleich Null.

c) Ist $l = r + \gamma \in \mathbb{Z}^n, r \in R, \gamma \in \Gamma$ und soll die Kommutatornorm $\| [K, T_l] \|_{\mathrm{op}}$ betrachtet werden, so reicht es, die Kommutatornorm $\| [K, T_r] \|_{\mathrm{op}}$ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}[K, T_l] &= KT_l - T_l K = KT_{r+\gamma} - T_{r+\gamma} K = KT_\gamma T_r - T_\gamma T_r K \\ &= T_\gamma K T_r - T_\gamma T_r K = T_\gamma \left(KT_r - T_r K\right) = T_\gamma \, [K, T_r]\end{aligned}$$

da der Kanaloperator K nach Lemma 10.5 Γ-invariant sind. Nach Bemerkung 2.1 ist der Verschiebungsoperator $T_\gamma : l^2 \left(\mathbb{Z}^n\right) \to l^2 \left(\mathbb{Z}^n\right)$ isometrisch, also gilt für die Kommutatornorm

$$\| [K, T_l] \|_{\mathrm{op}} = \| [K, T_r] \|_{\mathrm{op}}.$$

10.4 Orthogonale Filterbänke

In diesem Abschnitt wird erklärt, was unter einer orthogonalen Filterbank zu verstehen ist und welche speziellen Eigenschaften orthogonale Filterbänke besitzen.

Die Filter $g_i, h_i \in l^2(\mathbb{Z}^n), 1 \leq i \leq k$, seien so gewählt, dass $\downarrow_\Gamma (h_i * f) \in l^2(\Gamma)$ für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ und alle $1 \leq i \leq k$ gilt sowie die zugehörigen Kanaloperatoren

$$K_i : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), 1 \leq i \leq k,$$

wohldefiniert sind. In diesem Abschnitt bezeichnet i sowohl den Index der Filter als auch die imaginäre Einheit, die jeweilige Bedeutung erschließt sich jedoch aus dem Zusammenhang. Es bezeichnet $\mathbb{1} \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ den Vektor $(1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$.

(10.29) Bemerkung
Der Raum $l^2(\Gamma)$ wird im Folgenden mit dem Raum $(\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(l^2(\mathbb{Z}^n)) \subset l^2(\mathbb{Z}^n)$ identifiziert. Das heißt, die Folgen aus $l^2(\Gamma)$ werden auf $\mathbb{Z}^n \setminus \Gamma$ trivial fortgesetzt. Es gilt

$$\begin{aligned} & f \in l^2(\Gamma) \quad \Leftrightarrow \quad f(k) = 0 \text{ für alle } k \notin \Gamma \\ \Leftrightarrow \quad & \widehat{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\, e^{-i\langle x, \gamma \rangle} = \sum_{k \in \Gamma} f(\gamma)\, e^{-i\langle x+v, \gamma \rangle} = \widehat{f}(x+v) \text{ für fast alle } x \in \widehat{R} \text{ und alle} \\ & v \in \Gamma^\perp. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \mathcal{F}(l^2(\Gamma)) \\ &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C});\ f(x) = f(x+v) \text{ für fast alle } x \in \widehat{R} \text{ und alle } v \in \Gamma^\perp \right\}. \end{aligned}$$

Ist $f \in \mathcal{H}$, so folgt $f_\Gamma(x) = (f(x+v))_{v \in \Gamma^\perp} = \alpha \mathbb{1}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{C}$. Gilt andererseits $f_\Gamma(x) = \alpha \mathbb{1}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{C}$, so gilt insbesondere $f(x) = f(x+v)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v \in \Gamma^\perp$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \mathcal{F}(l^2(\Gamma)) &= \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C});\ f(x) = f(x+v) \text{ für fast alle } x \in \widehat{R} \text{ und alle } v \in \Gamma^\perp \right\} \\ &= \left\{ f \in L^2\big(\widehat{R}, \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\big);\ f_\Gamma(x) = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1} \text{ für fast alle } x \in \widehat{R} \right\}. \end{aligned}$$

(10.30) Definition (orthogonale Filterbank)
Die Filterbank $(K_i)_{1 \leq i \leq k}$ wird *orthogonale Filterbank* genannt, wenn der Analyse-Operator

$$T = (T_i)_{1 \leq i \leq k} : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\Gamma)^k, f \mapsto (\downarrow_\Gamma (h_i * f))_{1 \leq i \leq k},$$

unitär ist, wobei $T_i : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\Gamma), f \mapsto \downarrow_\Gamma (h_i * f)$ sei. Nach Voraussetzung an die Filter h_i sind die Abbildungen T_i wohldefiniert.

(10.31) Bemerkung
Ist $(K_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine orthogonale Filterbank, so ist der Analyse-Operator $T = (T_i)_{1 \leq i \leq k}$ stetig. Insbesondere sind die Abbildung T_i stetig.

Um Eigenschaften orthogonaler Filterbänke beweisen zu können wird sich, wie in den vorherigen Abschnitten, das Matrixkalkül auf der Fourierseite als hilfreiches Werkzeug erweisen. Aus diesem Grund ist die zur Fouriertransformierten des Analyse-Operators gehörige Matrix von Interesse. Um diese zu bestimmen, wird der Operator T komponentenweise betrachtet und es werden die zu den fouriertransformierten Operatoren T_i gehörigen Matrizen berechnet.

(10.32) Lemma
Für den Analyseoperator $T = (T_i)_{1\leq i\leq k}$ einer orthogonalen Filterbank $(K_i)_{1\leq i\leq k}$ gilt

$$\widehat{T}_{i,\Gamma}(x) = |\Gamma^\perp|^{-1}\left(\mathbb{1}\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right)$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und $1 \leq i \leq k$ sowie

$$\widehat{T}_\Gamma(x) : \mathbb{C}^{\Gamma^\perp} \to (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k,\ v \mapsto \left(|\Gamma^\perp|^{-1}\left(\mathbb{1}\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right)v\right)_{1\leq i\leq k}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$. Für den zu T adjungierten Operator T^* ergibt sich

$$\widehat{T}^*_\Gamma(x) : (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k \to \mathbb{C}^{\Gamma^\perp},\ (v_1,\ldots,v_n)^T \mapsto |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{i=1}^k\left(\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\otimes\mathbb{1}\right)v_i$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$.

Beweis
Ist $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, so ist $T_i f$ in der Menge $l^2(\Gamma)$ enthalten, also gilt $\widehat{T_i f} \in \mathcal{H}$ und damit insbesondere $(T_i f)^{\widehat{}}_\Gamma(x) \in \mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$. Die Abbildung $\widehat{T}_{i,\Gamma}(x)$ bildet also von $\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ nach $\mathbb{C}\cdot\mathbb{1}$ ab, also gilt $\widehat{T}_\Gamma(x) : \mathbb{C}^{\Gamma^\perp} \to (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k$ sowie $\widehat{T}^*_\Gamma(x) : (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k \to \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$.

Jetzt werden die Matrizen der Fouriertransformierten der T_i bestimmt. Dafür sei zunächst $f \in S(\mathbb{Z}^n) \subset l^1(\mathbb{Z}^n)$, dann gilt $h_i * f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, nach der Youngschen Ungleichung A.10 und somit $\downarrow_\Gamma(h_i * f) \in l^2(\Gamma)$. Es folgt

$$\downarrow_\Gamma(h_i * f) = P(h_i * f) \in l^2(\mathbb{Z}^n)$$

mit Bemerkung 10.29, wobei P der Projektor $P : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n), Pf = \mathbb{1}_\Gamma \cdot f$, sei. Nach dem Satz von Plancherel 5.8 gilt $(h_i * f)^{\widehat{}} \in L^2(\mathbb{T}^n, \mathbb{C})$ und es folgt für fast alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ mit Korollar 5.17, Satz 6.8 und Bemerkung 5.36

$$\begin{aligned}(T_i f)^{\widehat{}}(\xi) &= (\downarrow_\Gamma(h_i * f))^{\widehat{}}(\xi) = (P(h_i * f))^{\widehat{}}(\xi)\\ &= |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp} T_z\left((h_i * f)^{\widehat{}}\right)(\xi) = |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}(h_i * f)^{\widehat{}}(\xi - z)\\ &= |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{f}(\xi + z)\,\widehat{h}_i(\xi + z).\end{aligned}$$

Es folgt

$$(T_i f)^{\widehat{}}(x) = |\Gamma^\perp|^{-1}\sum_{z\in\Gamma^\perp}\widehat{f}(x+z)\,\widehat{h}_i(x+z) = |\Gamma^\perp|^{-1}\left\langle\widehat{f}_\Gamma(x), \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right\rangle_{l^2(\Gamma^\perp)}.$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und da $\widehat{T_i f} \in \mathcal{H}$ gilt, folgt für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\begin{aligned}(T_i f)^{\widehat{}}_\Gamma(x) &= |\Gamma^\perp|^{-1}\left\langle\widehat{f}_\Gamma(x), \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right\rangle_{l^2(\Gamma^\perp)}\cdot\mathbb{1}\\ &= \widehat{T}_{i,\Gamma}(x)\cdot\widehat{f}_\Gamma(x),\end{aligned} \tag{20}$$

mit $\widehat{T}_{i,\Gamma}(x) = |\Gamma^{\perp}|^{-1}\left(\mathbb{1} \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$. Da die Abbildung T_i nach Voraussetzung stetig auf $l^2(\mathbb{Z}^n)$ ist und $l^2(\Gamma)$ nach Bemerkung 10.29 als Teilmenge von $l^2(\mathbb{Z}^n)$ aufgefasst wird, folgt mit Lemma 9.17, dass (20) auch für $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ fast überall auf $\widehat{R}$ gilt.

Somit gilt

$$\widehat{T}_{\Gamma}(x) : \mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}} \to (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k,\ v \mapsto \left(|\Gamma^{\perp}|^{-1}\left(\mathbb{1}\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right)v\right)_{1\leq i\leq k}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und

$$\begin{aligned}\widehat{T}^{*}_{\Gamma}(x) : (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k \to \mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}},\ (v_1,\ldots,v_n)^T \mapsto& |\Gamma^{\perp}|^{-1}\left(\mathbb{1}\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right)^{*}_{1\leq i\leq k}(v_1,\ldots,v_n)^T\\ =& |\Gamma^{\perp}|^{-1}\left(\overline{\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)}\otimes\mathbb{1}\right)_{1\leq i\leq k}(v_1,\ldots,v_n)^T\\ =& |\Gamma^{\perp}|^{-1}\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)}\otimes\mathbb{1}\right)v_i\end{aligned}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ nach Lemma 9.11. $\square$

(10.33) Bemerkung
Der Analyse-Operator T ist genau dann unitär, wenn $T^*T = \mathrm{Id}_{l^2(\mathbb{Z}^n)}$ und $TT^* = \mathrm{Id}_{l^2(\Gamma)^k}$ gilt. Dies ist nach Lemma 10.32 und dem Satz von Plancherel 5.8 äquivalent dazu, dass $\widehat{T}^{*}_{\Gamma}(x)\,\widehat{T}_{\Gamma}(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}$ und $\widehat{T}_{\Gamma}(x)\,\widehat{T}^{*}_{\Gamma}(x) = \mathrm{Id}_{(\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ gilt. Der Beweis der Äquivalenz verläuft analog zum ersten Teil des Beweises von Satz 10.16, wenn $K = T^*T$ bzw. $K = TT^*$ gesetzt wird.

Jetzt wird die wohl interessanteste Eigenschaft orthogonaler Filterbänke bewiesen. Dazu bedarf es allerdings noch eines Hilfsmittels, das im folgenden Lemma bewiesen wird.

(10.34) Lemma*
Ist $A \in \mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}\times\Gamma^{\perp}}$ eine selbstadjungierte Matrix und gilt

$$\langle Aw, w\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}} = \|w\|^2_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}$$

für alle $w \in \mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}$, so ist $A = \mathrm{Id}$.

Beweis
Die Matrix A besitzt eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren w_j, mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j, 1 \leq j \leq |\Gamma^{\perp}|$. Nach Voraussetzung gilt

$$\|w_j\|^2_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}} = \langle Aw_j, w_j\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}} = \lambda_j\|w_j\|^2_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}$$

für alle $1 \leq j \leq |\Gamma^{\perp}|$, das heißt $\lambda_j = 1$ für alle $1 \leq j \leq |\Gamma^{\perp}|$, also gilt $A = \mathrm{Id}$. $\square$

(10.35) Satz*
Die Filterbank $(K_i)_{1\leq i\leq k}$ ist genau dann orthogonal, wenn das System

$$(|\Gamma^{\perp}|^{-\frac{1}{2}}\cdot\widehat{h_{i,\Gamma}}(x))_{1\leq i\leq k} \subset l^2(\Gamma^{\perp})$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ eine Orthonormalbasis ist; insbesondere gilt dann auch $k = |\Gamma^{\perp}|$.

Beweis
Nach Bemerkung 10.33 ist zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
&\text{Für fast alle } x \in \widehat{R} \text{ gilt } \widehat{T}_\Gamma^*(x)\,\widehat{T}_\Gamma(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \text{ und } \widehat{T}_\Gamma(x)\,\widehat{T}_\Gamma^*(x) = \mathrm{Id}_{(\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k}\\
\Leftrightarrow\quad &\text{Für fast alle } x \in \widehat{R} \text{ ist } (|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}} \cdot \widehat{h_{i,\Gamma}}(x))_{1\le i\le k} \subset l^2(\Gamma^\perp) \text{ eine Orthonormalbasis.}
\end{aligned}
$$

Also werden zunächst die Produkte $\widehat{T}_\Gamma^*(x)\,\widehat{T}_\Gamma(x)$ und $\widehat{T}_\Gamma(x)\,\widehat{T}_\Gamma^*(x)$ bestimmt.

Für $w \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ folgt mit Lemma 9.11 für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$
\begin{aligned}
\widehat{T}_\Gamma^*(x)\,\widehat{T}_\Gamma(x)\,w &= |\Gamma^\perp|^{-2} \sum_{i=1}^{k} \left(\widehat{h_{i,\Gamma}}(x) \otimes \mathbb{1}\right) \left(\left(\mathbb{1} \otimes \overline{\widehat{h_{j,\Gamma}}(x)}\right) w\right)_{1\le j\le k}(i) \qquad (21)\\
&= |\Gamma^\perp|^{-2} \sum_{i=1}^{k} \left(\widehat{h_{i,\Gamma}}(x) \otimes \mathbb{1}\right) \left(\mathbb{1} \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right) w\\
&= |\Gamma^\perp|^{-2} \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\langle \mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}}_{=|\Gamma^\perp|} \left(\widehat{h_{i,\Gamma}}(x) \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right) w\\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\widehat{h_{i,\Gamma}}(x) \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right) w.
\end{aligned}
$$

Für $(v_1, \ldots, v_k)^T \in (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k$ gilt $v_i = \alpha_i \mathbb{1}, \alpha_i \in \mathbb{C}$, sowie

$$
(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, v_i = \alpha_i\, (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, \mathbb{1} = \alpha_i\, \langle \mathbb{1}, \mathbb{1}\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\, \mathbb{1} = |\Gamma^\perp| \alpha_i \mathbb{1} = |\Gamma^\perp| v_i.
$$

Damit und mit Lemma 9.11 folgt für $(v_1, \ldots, v_k)^T \in (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k$ für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$
\begin{aligned}
\widehat{T}_\Gamma(x)\,\widehat{T}_\Gamma^*(x)\,(v_1, \ldots, v_k)^T &= |\Gamma^\perp|^{-2} \left(\left(\mathbb{1} \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right) \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\widehat{h_{j,\Gamma}}(x) \otimes \mathbb{1}\right) v_j\right)\right)_{1\le i\le k}\\
&= |\Gamma^\perp|^{-2} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(\mathbb{1} \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right) \left(\widehat{h_{j,\Gamma}}(x) \otimes \mathbb{1}\right) v_j\right)_{1\le i\le k}\\
&= |\Gamma^\perp|^{-2} \left(\sum_{j=1}^{k} \left\langle \widehat{h_{j,\Gamma}}(x), \widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\, v_j\right)_{1\le i\le k}\\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \left\langle \widehat{h_{j,\Gamma}}(x), \widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} v_j\right)_{1\le i\le k}\\
&= |\Gamma^\perp|^{-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \left\langle \widehat{h_{j,\Gamma}}(x), \widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \alpha_j \mathbb{1}\right)_{1\le i\le k}.
\end{aligned}
$$

Nun wird die Äquivalenz gezeigt. Einerseits gilt

$$
\begin{aligned}
&\widehat{T}_\Gamma^*(x)\,\widehat{T}_\Gamma(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\\
\Leftrightarrow\quad &|\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left(\widehat{h_{i,\Gamma}}(x) \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)}\right) w = w \text{ für alle } w \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & w = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left\langle w, \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x) \text{ für alle } w \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp} \\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \quad & \langle w, w \rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \|w\|^2_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \left\langle w, |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left\langle w, \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x) \right\rangle \\
& \qquad = |\Gamma^\perp|^{-1} \sum_{i=1}^{k} \left| \left\langle w, \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right\rangle \right|^2 \text{ für alle } w \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}
\end{aligned}
$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$. An der Stelle $(*)$ geht ein, dass es sich bei $\widehat{T}^*_\Gamma\,(x)\,\widehat{T}_\Gamma\,(x)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ um eine selbstadjungierte Matrix handelt; dann folgt die Richtung „$\Leftarrow$“ aus Lemma 10.34. Es gilt also

$$
\widehat{T}^*_\Gamma\,(x)\,\widehat{T}_\Gamma\,(x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \text{ für fast alle } x \in \widehat{R} \tag{22}
$$

$\Leftrightarrow$ Das System $\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}} \cdot \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right)_{1 \le i \le k}$ erfüllt für fast alle $x \in \widehat{R}$ die Parseval-Gleichung.

Andererseits gilt

$$
\begin{aligned}
& \widehat{T}_\Gamma\,(x)\,\widehat{T}^*_\Gamma\,(x) = \mathrm{Id}_{(\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k} \\
\Leftrightarrow \quad & |\Gamma^\perp|^{-1} \left(\sum_{j=1}^{k} \left\langle \overline{\widehat{h_{j,\Gamma}}\,(x)}, \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} v_j \right)_{1 \le i \le k} = \mathbf{v} \\
& \text{für alle } \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k)^T \in (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k \\
\Leftrightarrow \quad & A\mathbf{v} = \mathbf{v} \text{ für alle } \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_k)^T \in (\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k \\
& \text{mit } A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i,j \le k},\ a_{ij} := |\Gamma^\perp|^{-1} \left\langle \overline{\widehat{h_{j,\Gamma}}\,(x)}, \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \\
\Leftrightarrow \quad & A = \mathrm{Id} \\
\Leftrightarrow \quad & a_{ij} := |\Gamma^\perp|^{-1} \left\langle \overline{\widehat{h_{j,\Gamma}}\,(x)}, \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$, also

$$
\widehat{T}_\Gamma\,(x)\,\widehat{T}^*_\Gamma\,(x) = \mathrm{Id}_{(\mathbb{C}\cdot\mathbb{1})^k} \text{ für fast alle } x \in \widehat{R} \tag{23}
$$

$\Leftrightarrow$ Das System $\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}} \cdot \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}\,(x)} \right)_{1 \le i \le k}$ ist für fast alle $x \in \widehat{R}$ ein Orthonormalsystem.

Aus Bemerkung 10.33 und den Äquivalenzen in (22) und (23) folgt dann, dass die Filterbank K genau dann orthogonal ist, wenn $(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}} \cdot \widehat{h}_{i,\Gamma}(x))_{1 \le i \le k}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ eine Orthonormalbasis von $l^2\,(\Gamma^\perp)$ ist, vgl. [13, Satz V.4.9]. Insbesondere gilt dann $k = |\Gamma^\perp|$.□

Im Folgenden seien die Kanaloperatoren $K_i : l^2\,(\mathbb{Z}^n) \to l^2\,(\mathbb{Z}^n), 1 \le i \le k$, stetig.

(10.36) Korollar
Für eine orthogonale Filterbank $(K_i)_{1 \le i \le k}$ sind äquivalent:

(i) Die Filterbank rekonstruiert perfekt.

(ii) Es gilt $\widehat{g_i} = \overline{\widehat{h_i}}$ fast überall.

Beweis

Die Filterbank $(K_i)_{1 \leq i \leq k}$ sei perfekt rekonstruierend. Nach Satz 10.16 und Bemerkung 10.33 gilt dann für alle $v, w \in \Gamma^\perp$ und für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\sum_{i=1}^{k} \widehat{g_i}\,(x+v)\,\widehat{h_i}\,(x+w) = \begin{cases} |\Gamma^\perp|, & \text{falls } v = w, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

mit $k = |\Gamma^\perp|$ nach Satz 10.35. Nach Voraussetzung ist der Analyse-Operator T unitär und es folgt für fast alle $x \in \widehat{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|\Gamma^\perp|} \overline{\widehat{h_i}}\,(x+v)\,\widehat{h_i}\,(x+w) &= \sum_{i=1}^{|\Gamma^\perp|} \left(\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x) \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x)\right)(v,w) \\ &= |\Gamma^\perp| \cdot \widehat{T}_\Gamma^*\,(x)\,\widehat{T}_\Gamma\,(x)\,(v,w) \\ &= |\Gamma^\perp| \cdot \mathrm{Id}\,(v,w) = \begin{cases} |\Gamma^\perp|, & \text{falls } v = w, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

vgl. (21) im Beweis von Satz 10.35. Insgesamt gilt also

$$\sum_{i=1}^{|\Gamma^\perp|} \left(\widehat{g_i}\,(x+v) - \overline{\widehat{h_i}}\,(x+v)\right)\widehat{h_i}\,(x+w) = 0$$

für alle $v, w \in \Gamma^\perp$ und fast alle $x \in \widehat{R}$. Dies ist äquivalent zu $A(x) \cdot B(x) = 0$ für fast alle $x \in \widehat{R}$, mit

$$A(x) := \left(\widehat{g_i}\,(x+z) - \overline{\widehat{h_i}}\,(x+z)\right)_{(z,i) \in \Gamma^\perp \times \{1,\dots,|\Gamma^\perp|\}}$$

und

$$B(x) := \left(\widehat{h_i}\,(x+z)\right)_{(i,z) \in \{1,\dots,|\Gamma^\perp|\} \times \Gamma^\perp}, \; x \in \widehat{R}.$$

Die Spalten von $|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}} \cdot B(x)$ bilden für fast alle $x \in \widehat{R}$ nach Satz 10.35 eine Orthonormalbasis von $l^2\,(\Gamma^\perp)$, somit ist $|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}} \cdot B(x)$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ unitär, also ist $B(x)$ invertierbar und es folgt $A(x) = 0$ für fast alle $x \in \widehat{R}$. Damit gilt $\widehat{g}_{i,\Gamma} = \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}$ sowie $\widehat{g_i} = \overline{\widehat{h_i}}$ fast überall nach Lemma 9.14.

Gilt andererseits $\widehat{g_i} = \overline{\widehat{h_i}}$ fast überall, so folgt aus der Orthogonalitätsbedingung und Bemerkung 10.33

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{|\Gamma^\perp|} \widehat{g_i}\,(x+v)\,\widehat{h_i}\,(x+w) &= \sum_{i=1}^{|\Gamma^\perp|} \overline{\widehat{h_i}}\,(x+v)\,\widehat{h_i}\,(x+w) \\ &= \sum_{i=1}^{|\Gamma^\perp|} \left(\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x) \otimes \overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\,(x)\right)(v,w) = |\Gamma^\perp| \cdot \widehat{T}_\Gamma^*\,(x)\,\widehat{T}_\Gamma\,(x)\,(v,w) \end{aligned}$$

$$= |\Gamma^{\perp}| \cdot \mathrm{Id}\,(v,w) = \begin{cases} |\Gamma^{\perp}|, & \text{falls } v = w, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $v, w \in \Gamma^{\perp}$, vgl. (21) im Beweis von Satz 10.35. Aus Satz 10.16 folgt dann, dass die Filterbank $(K_i)_{1 \le i \le k}$ perfekt rekonstruiert. □

Das folgende Lemma zeigt, dass es Filter gibt, so dass die zugehörigen Kanaloperatoren $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant sind. Nach Lemma 10.11 kann es sich dabei nicht um nicht-triviale Filter mit stetigen Fouriertransformierten handeln.

(10.37) Lemma
Es existiert eine orthogonale Filterbank $(K_w)_{w \in \Gamma^{\perp}}$, so dass alle K_w $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant sind. Insbesondere ist dann auch $K = \sum_{w \in \Gamma^{\perp}} K_w$ $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant.

Beweis
Es gilt

$$\mathbb{T}^n = \dot{\bigcup_{x \in \widehat{R}}} x + \Gamma^{\perp} = \dot{\bigcup_{w \in \Gamma^{\perp}}} w + \widehat{R} = \dot{\bigcup_{w \in \Gamma^{\perp}}} A_w$$

mit $A_w := w + \widehat{R}, w \in \Gamma^{\perp}$. Nun werden die Filter $g_w, h_w, w \in \Gamma^{\perp}$, über ihre Fouriertransformierten definiert:

$$\widehat{h}_w(\xi) = \widehat{g}_w(\xi) = \widehat{g}_w(x+v) := |\Gamma^{\perp}|^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbb{1}_{A_w}(x+v) = \begin{cases} |\Gamma^{\perp}|^{\frac{1}{2}}, & \text{falls } v = w, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\xi = x + v \in \mathbb{T}^n, x \in \widehat{R}, v \in \Gamma^{\perp}$. Ist K_w der zu g_w und h_w gehörige Kanaloperator, so gilt nach Bemerkung 10.10

$$\left(\widehat{K_w}\right)_{\Gamma}(x)\,(v,z) = |\Gamma^{\perp}|^{-1} \widehat{g}_w(x+v)\,\widehat{h}_w(x+z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } v = w = z, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also ist K_w nach Lemma 9.28 für jedes $w \in \Gamma^{\perp}$ vollständig shiftinvariant. Gleiches gilt dann auch für die Filterbank $K = \sum_{w \in \Gamma^{\perp}} K_w$.

Es bleibt die Orthogonalität der Filterbank zu zeigen. Es gilt für fast alle $x \in \widehat{R}$ und alle $w, z \in \Gamma^{\perp}$

$$\begin{aligned} \left(|\Gamma^{\perp}|^{-\frac{1}{2}} \widehat{h_{w,\Gamma}}(x), |\Gamma^{\perp}|^{-\frac{1}{2}} \widehat{h}_{z,\Gamma}(x)\right)_{l^2(\Gamma^{\perp})} &= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^{\perp}} \widehat{h_{w,\Gamma}}(x)(v)\,\overline{\widehat{h_{z,\Gamma}}(x)(v)} \\ &= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sum_{v \in \Gamma^{\perp}} \widehat{h}_w(x+v)\,\overline{\widehat{h}_z(x+v)} \\ &= \sum_{v \in \Gamma^{\perp}} \mathbb{1}_{A_w}(x+v)\,\mathbb{1}_{A_z}(x+v) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } w = z, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Es handelt sich bei dem System $(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\widehat{h_{w,\Gamma}}(x))_{w\in\Gamma^\perp}$ für fast alle $x \in \widehat{R}$ um ein Orthonormalsystem. Außerdem gilt für beliebiges $f \in l^2(\Gamma^\perp)$

$$\left(f, |\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\widehat{h_{w,\Gamma}}(x)\right)_{l^2(\Gamma^\perp)} = |\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}} \sum_{v\in\Gamma^\perp} f(v)\,\overline{\widehat{h_w}}(x+v) = \sum_{v\in\Gamma^\perp} f(v)\,\mathbb{1}_{A_w}(x+v) = f(w),$$

das heißt für fast alle $x \in \widehat{R}$ ist

$$\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\widehat{h_{w,\Gamma}}(x)\right)_{w\in\Gamma^\perp}$$

total und somit eine Orthonormalbasis von $l^2(\Gamma^\perp)$. Nach Satz 10.35 handelt es sich bei der Abbildung $K = \sum_{w\in\Gamma^\perp} K_w$ um eine orthogonale Filterbank. □

10.5 Die Kommutatornorm im Fall orthogonaler Filterbänke

Die Filter $g_i, h_i \not\equiv 0, 1 \le i \le |\Gamma^\perp|$, seien so gewählt, dass ihre Fouriertransformierten $\widehat{g_i}, \widehat{h_i}, 1 \le i \le |\Gamma^\perp|$, stetige Funktionen sind und die zugehörigen Kanaloperatoren

$$K_i : l^2(\mathbb{Z}^n) \to l^2(\mathbb{Z}^n),\; K_i f = g_i * \left((\uparrow_\Gamma \circ \downarrow_\Gamma)(h_i * f)\right),$$

stetig sind. Unter diesen Voraussetzungen sind die Kanaloperatoren nach Lemma 10.11 nicht $\mathbb{Z}^n$-shiftinvariant. Außerdem gilt $\widehat{h_i} \cdot \widehat{f} \in L^2(\mathbb{T}^n)$ für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, das heißt nach dem Satz von Plancherel 5.8 und Satz 6.8 gilt $h_i * f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$ für alle $f \in l^2(\mathbb{Z}^n)$, also ist der Analyse-Operator der Filterbank $(K_i)_{i=1,\dots,|\Gamma^\perp|}$ wohldefiniert.

Es sei $(K_i)_{i=1,\dots,|\Gamma^\perp|}$ eine orthogonale, perfekt rekonstruierende Filterbank. Nach Korollar 10.36 gilt dann $\widehat{g_i} = \overline{\widehat{h_i}}$. Für $l \in \mathbb{Z}^n$ wird

$$D^l := \operatorname{diag}\left(\left(e^{i\langle w,l\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp}\right) \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp\times\Gamma^\perp} \quad \text{und} \quad \vec{w}^l := \left(e^{i\langle w,l\rangle}\right)_{w\in\Gamma^\perp} \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$$

definiert. In diesem Abschnitt bezeichnet i sowohl den Index der Filter als auch die imaginäre Einheit, die jeweilige Bedeutung erschließt sich jedoch aus dem Zusammenhang.

Es wird gezeigt, dass im Fall eines geraden Indexes von Γ in $\mathbb{Z}^n$ ein $l \in \mathbb{Z}^n$ existiert, so dass $\|[K_i, T_l]\|_{\text{op}} = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, |\Gamma^\perp|\}$ erfüllt ist.

In der folgenden Bemerkung die werden die Notationen aus Abschnitt 10.3 an die jetzige Situation angepasst.

(10.38) Bemerkung
In diesem Abschnitt werden die Kanaloperatoren K_i einer orthogonalen, pefekt rekonstruirenden Filterbank betrachtet, also gilt nach Korollar 10.36 für $1 \le i \le |\Gamma^\perp|$

$$\widehat{g_i} = \overline{\widehat{h_i}}.$$

Dies ist nach Lemma 9.14 äquivalent zu $\widehat{g}_{i,\Gamma} = \overline{\widehat{h}_{i,\Gamma}}, 1 \leq i \leq |\Gamma^\perp|$. Nach Lemma 10.26 besitzt dann die Fouriertransformierte der Abbildung $[K_i, T_l]$ die Matrixdarstellung

$$\mathbf{T}_i(l,x) := [K_i, T_l]\widehat{\ }_\Gamma\,(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} e^{-i\langle x,l\rangle} \left[\overline{\widehat{h}_{i,\Gamma}}\,(x) \otimes \overline{\widehat{h}_{i,\Gamma}}\,(x)\,, D^{-l} \right],$$

für alle $x \in \widehat{R}$ und es wird

$$\mathbf{A}_i(l,x) := \mathbf{T}_i^*(l,x)\,\mathbf{T}_i(l,x)$$

definiert.

Zur Erinnerung: Da die Fouriertransformierten $\widehat{h}_i$ der Filter h_i nach Voraussetzung stetig sind, gilt nach Satz 10.27

$$\begin{aligned} \|\,[K_i, T_l]\,\|_{\mathrm{op}}^2 &= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\widehat{R}} \lambda_{\max}\left(\mathbf{A}_i(l,x)\right) = \sup_{x\in\widehat{R}} \lambda_{\max}\left(\mathbf{A}_i(l,x)\right) \\ &= \sup_{x\in\widehat{R}} \|\mathbf{T}_i(l,x)\,\|_{\mathrm{op}}^2. \end{aligned}$$

Das nächste Lemma trifft nun eine Aussage über die Spektralnorm einer Klasse von Matrizen, der die Matrix $\mathbf{T}_i(l,x)$ aufgrund von Satz 10.35 angehört.

(10.39) Lemma*
Sei $u \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ mit $\|u\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = 1$ und $D \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp\times\Gamma^\perp}$ eine unitäre Matrix. Dann gilt für die Norm der Matrix $T := [(u\otimes u)\,, D]$

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\lambda_{\max}\left(T^*T\right)} = \sqrt{1 - |\langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}|^2},$$

falls u und Du linear unabhängig sind und $\|T\|_{\mathrm{op}} = 0$, falls u und Du linear abhängig sind.

Beweis
Es gilt

$$T^* = [u\otimes u, D]^* = D^*\left(u\otimes u\right) + \left(u\otimes u\right) D^* = [D^*, (u\otimes u)]$$

und

$$\left(u\otimes u\right)^2 = \|u\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}^2\left(u\otimes u\right) = \left(u\otimes u\right).$$

Mit Lemma 9.11 folgt

$$\begin{aligned} T^*T &= [D^*, (u\otimes u)]\,[(u\otimes u)\,, D] \\ &= \left(D^*\left(u\otimes u\right) - \left(u\otimes u\right) D^*\right)\left(\left(u\otimes u\right) D - D\left(u\otimes u\right)\right) \\ &= \left(\left(D^*u\right)\otimes u - u\otimes\left(Du\right)\right)\left(u\otimes\left(D^*u\right) - \left(Du\right)\otimes u\right) \\ &= \|u\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\left(D^*u\right)\otimes\left(D^*u\right) - \langle Du, u\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\left(D^*u\right)\otimes u \\ &\quad - \langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\, u\otimes\left(D^*u\right) + \|Du\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\left(u\otimes u\right) \\ &= \left(D^*u\right)\otimes\left(\left(D^*u\right) - \overline{\langle Du, u\rangle}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\, u\right) \\ &\quad + u\otimes\left(u - \overline{\langle u, Du\rangle}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\left(D^*u\right)\right). \end{aligned}$$

1. Fall: Die Vektoren u und Du sind linear abhängig. Dann sind die Vektoren u und D^*u auch linear abhängig, das heißt es existiert ein $\mu \in \mathbb{C}$, so dass $D^*u = \mu u$ gilt. Somit ist u ein Eigenvektor von D^* zum Eigenwert μ und μ^{-1} ein Eigenwert zum Eigenvektor u von D. Da D unitär ist, gilt $|\mu| = 1$. Damit folgt aus der vorletzten Zeile der letzte Rechnung

$$T^*T = |\mu|^2 (u \otimes u) - \mu^{-1}\mu (u \otimes u) - \overline{\mu}^{-1}\overline{\mu} (u \otimes u) + (u \otimes u) = 0,$$

also gilt $\|T\|_{\mathrm{op}}^2 = \lambda_{\max} (T^*T) = 0$.

2. Fall: Die Vektoren u und Du sind linear unabhängig. Dann hat die Matrix T^*T Rang 2 und es folgt

$$\begin{aligned}
T^*Tu &= \left\langle u, (D^*u) - \overline{\langle Du, u\rangle}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} u \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} (D^*u) \\
&\quad + \left\langle u, u - \overline{\langle u, Du\rangle}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} (D^*u) \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} u \\
&= (\langle u, D^*u\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} - \langle Du, u\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}) (D^*u) \\
&\quad + (1 - \langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \langle u, D^*u\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}) u \\
&= \left(1 - |\langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}|^2\right) u
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
T^*T (D^*u) &= \left\langle D^*u, D^*u - \overline{\langle Du, u\rangle}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} u \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} (D^*u) \\
&\quad + \left\langle D^*u, u - \overline{\langle u, Du\rangle}_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} (D^*u) \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} u \\
&= (1 - \langle Du, u\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} \langle D^*u, u\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}) (D^*u) \\
&\quad + (\langle D^*u, u\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} - \langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}) \\
&= \left(1 - |\langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}|^2\right) (D^*u) .
\end{aligned}$$

Sei $\alpha := 1 - |\langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}|^2$, dann ist sowohl u als auch D^*u ein Eigenvektor von T^*T zum Eigenwert α. Für $3 \leq j \leq |\Gamma^\perp|$ seien $\lambda_j = 0$ die Eigenwerte von T^*T zu den Eigenvektoren v_j. Es gilt $\mathrm{Kern}\,(T^*T) = \mathrm{span}\left(v_j\,;\, 3 \leq j \leq |\Gamma^\perp|\right)$ und ist $v \in \mathrm{Kern}\,(T^*T)$, so folgt

$$\langle u, v\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \alpha^{-1} \langle \alpha u, v\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \alpha^{-1} \langle T^*Tu, v\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \alpha^{-1} \langle u, T^*Tv\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = 0$$

und analog $\langle D^*u, v\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = 0$ für beliebiges $v \in \mathrm{Kern}\,(T^*T)$. Es gilt also

$$\mathrm{span}\,(u, D^*u) = \mathrm{Kern}\,(T^*T)^\perp$$

und $B := \{u, D^*u, v_3, \ldots, v_{|\Gamma^\perp|}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$. Die Matrix T^*T ist ähnlich zur Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{|\Gamma^\perp| \times |\Gamma^\perp|}$ bezüglich dieser Basis,

$$A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq |\Gamma^\perp|} = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } i = j \in \{1, 2\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt also

$$\|T\|_{\mathrm{op}}^2 = \lambda_{\max} (T^*T) = \alpha = 1 - |\langle u, Du\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}|^2. \qquad \square$$

Dieses Ergebnis wird jetzt auf die Kanaloperatoren K_i einer orthogonalen Filterbank übertragen.

(10.40) Bemerkung
Nach Bemerkung 10.38 gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_i(l,x) &:= \widehat{[K_i,T_l]_\Gamma}(x) = |\Gamma^\perp|^{-1} e^{-i\langle x,l\rangle}\left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x), D^{-l}\right]\\ &= \left[\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right)\otimes\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right), e^{-i\langle x,l\rangle}D^{-l}\right],\end{aligned}$$

für alle $x\in\widehat{R}$. Die Matrix $e^{-i\langle x,l\rangle}D^{-l}\in\mathbb{C}^{\Gamma^\perp\times\Gamma^\perp}$ ist unitär und es gilt

$$\left\||\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\|_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = 1$$

für alle $x\in\widehat{R}$ nach Satz 10.35. Außerdem gilt

$$|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}e^{-i\langle x,l\rangle}D^{-l}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) = |\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}e^{-i\langle x,l\rangle}\left(e^{-i\langle w,l\rangle}\overline{\widehat{h_i}}(x+w)\right)_{w\in\Gamma^\perp},$$

also sind $|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)$ und $|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}e^{-i\langle x,l\rangle}D^{-l}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)$ linear unabhängig und alle Voraussetzungen von Lemma 10.39 sind erfüllt. Es folgt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{T}_i(l,x)\|_{\mathrm{op}}^2 &= \left\|\left[\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right)\otimes\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right), e^{-i\langle x,l\rangle}D^{-l}\right]\right\|_{\mathrm{op}}^2\\ &= 1-\left|\left\langle\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right), e^{-i\langle x,l\rangle}D^{-l}\left(|\Gamma^\perp|^{-\frac{1}{2}}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\right|^2\\ &= 1-\left|e^{i\langle x,l\rangle}\right|^2\left||\Gamma^\perp|^{-1}\left\langle\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x), D^{-l}\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\right|^2\\ &= 1-|\Gamma^\perp|^{-2}\left|\left\langle\widehat{h_{i,\Gamma}}(x), D^{l}\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\right|^2\end{aligned}$$

für alle $x\in\widehat{R}$, also

$$\|\mathbf{T}_i(l,x)\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{1-|\Gamma^\perp|^{-2}\left|\left\langle\widehat{h_{i,\Gamma}}(x), D^{l}\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\right|^2}.$$

Für die Kommutatornorm ergibt sich nach Satz 10.27

$$\begin{aligned}\|[K_i,T_l]\|_{\mathrm{op}}^2 &= \sup_{x\in\widehat{R}}\|\mathbf{T}_i(l,x)\|_{\mathrm{op}}^2 = \sup_{x\in\widehat{R}}\left(1-|\Gamma^\perp|^{-2}\left|\left\langle\widehat{h_{i,\Gamma}}(x), D^{l}\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\right|^2\right) \qquad (24)\\ &= 1-|\Gamma^\perp|^{-2}\inf_{x\in\widehat{R}}\left|\left\langle\widehat{h_{i,\Gamma}}(x), D^{l}\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}\right|^2.\end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, ist das Ziel dieses Abschnitts zu zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen an die Untergruppe Γ ein $l\in\mathbb{Z}^n$ existiert, so dass $\|[K_i,T_l]\|_{\mathrm{op}} = 1$ für alle $i\in\{1,\ldots,|\Gamma^\perp|\}$ gilt. In den nächsten beiden Lemmata wird gezeigt, dass

$$\sup_{x\in\widehat{R}}\|\mathbf{T}_i(l,x)\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\xi\in\mathbb{T}^n}\|\mathbf{T}_i(l,\xi)\|_{\mathrm{op}} \qquad (25)$$

erfüllt ist. Anschließend wird mit Hilfe dieser beiden Lemmata und des Zwischenwertsatzes gezeigt, dass unter den bestimmten Voraussetzungen ein $l \in \mathbb{Z}^n$ und ein $\xi_0 \in \mathbb{T}^n$ existieren, so dass

$$\left\langle \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi_0\right), D^l \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi_0\right) \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = 0$$

gilt, also $\|\left[K_i, T_l\right]\|_{\text{op}} = 1$ erfüllt ist. Um den Zwischenwertsatz anwenden zu können, ist es notwendig, die Stetigkeit der $\widehat{h_i}$ auf $\mathbb{T}^n$ auszunutzen. Aus diesem Grund wird Gleichung (25) bewiesen.

(10.41) Definition

Es sei $\mathcal{U}\left(\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\right)$ die unitäre Gruppe über $\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$. Dann wird die Abbildung

$$\varrho : \Gamma^\perp \to \mathcal{U}\left(\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}\right), \ \left(\varrho\left(w\right)v\right)\left(w'\right) := v\left(w + w'\right),$$

für alle $w' \in \Gamma^\perp, v \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ definiert.

(10.42) Lemma*

a) Da es sich für $w \in \Gamma^\perp$ bei $\varrho\left(w\right)$ um eine unitäre Matrix handelt, gilt $\varrho\left(w\right)^* = \varrho\left(w\right)^{-1}$ und $\varrho\left(w\right)^*$ ist gegeben durch

$$\left(\varrho\left(w\right)^* v\right)\left(w'\right) = v\left(w' - w\right)$$

für alle $w' \in \Gamma^\perp, v \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$.

b) Es gilt für $\widehat{h_{i,\Gamma}} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$

$$\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi + w\right) = \varrho\left(w\right)\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)$$

für alle $w \in \Gamma^\perp, \xi \in \mathbb{T}^n$.

c) Für alle $w \in \Gamma^\perp$ und $l \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\varrho\left(w\right)^* D^{-l}\varrho\left(w\right) = e^{i\langle w,l\rangle} D^{-l}.$$

d) Es gilt für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$

$$\left\langle \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right), D^l \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right) \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \left\langle |\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)|^2, \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}},$$

wenn $|\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)|^2 \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ den Vektor $|\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)|^2 := \left(|\widehat{h_i}\left(\xi + w\right)|^2\right)_{w\in\Gamma^\perp}$ bezeichnet.

Beweis

a) Die Abbildung T sei auf $\Gamma^\perp$ wie folgt definiert:

$$\left(T\left(w\right)v\right)\left(w'\right) := v\left(w' - w\right), w' \in \Gamma^\perp, v \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp},$$

dann gilt

$$\left(T\left(w\right)\varrho\left(w\right)v\right)\left(w'\right) = \left(\varrho\left(w\right)v\right)\left(w' - w\right) = v\left(w'\right)$$

sowie

$$\left(\varrho\left(w\right)T\left(w\right)v\right)\left(w'\right) = \left(T\left(w\right)v\right)\left(w + w'\right) = v\left(w'\right)$$

für alle $w, w' \in \Gamma^\perp, v \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$, also gilt $\varrho\left(w\right)^* = T\left(w\right)$ für alle $w \in \Gamma^\perp$.

b) Es gilt für alle $w, w' \in \Gamma^\perp, \xi \in \mathbb{T}^n$

$$\left(\varrho\left(w\right)\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)\right)\left(w'\right) = \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)\left(w+w'\right) = \widehat{h_i}\left(\xi+w+w'\right)$$
$$= \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi+w\right)\left(w'\right),$$

also $\varrho\left(w\right)\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right) = \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi+w\right)$.

c) Es gilt für alle $w, w' \in \Gamma^\perp, v \in \mathbb{C}^{\Gamma^\perp}$ und $l \in \mathbb{Z}^n$

$$\left(D^{-l}\varrho\left(w\right)v\right)\left(w'\right) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} D^{-l}\left(w',z\right)\left(\varrho\left(w\right)v\right)\left(z\right) = \sum_{z\in\Gamma^\perp} D^{-l}\left(w',z\right)v\left(w+z\right)$$
$$= e^{-i\langle w',l\rangle}v\left(w+w'\right).$$

und damit sowie mit Teil a) folgt

$$\left(\varrho\left(w\right)^* D^{-l}\varrho\left(w\right)v\right)\left(w'\right) = \left(D^{-l}\varrho\left(w\right)v\right)\left(w'-w\right) = e^{-i\langle w'-w,l\rangle}v\left(w+w'-w\right)$$
$$= e^{i\langle w,l\rangle}e^{-i\langle w',l\rangle}v\left(w'\right) = e^{i\langle w,l\rangle}\left(D^{-l}v\right)\left(w'\right),$$

also $\varrho\left(w\right)^* D^{-l}\varrho\left(w\right) = e^{i\langle w,l\rangle}D^{-l}$.

d) Es gilt

$$\left\langle \widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right), D^l\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}} = \sum_{w\in\Gamma^\perp}\widehat{h_i}\left(\xi+w\right)\overline{D^l\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)\left(w\right)}$$
$$= \sum_{w\in\Gamma^\perp}\widehat{h_i}\left(\xi+w\right)\overline{e^{i\langle w,l\rangle}\widehat{h_i}\left(\xi+w\right)}$$
$$= \sum_{w\in\Gamma^\perp}|\widehat{h_i}\left(\xi+w\right)|^2\overline{e^{i\langle w,l\rangle}} = \left\langle |\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(\xi\right)|^2, \vec{w}^l\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^\perp}}$$

für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$. □

(10.43) Lemma*
Für alle $l \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\sup_{x\in\widehat{R}}\|\mathbf{T}_i(l,x)\|_{\mathrm{op}} = |\Gamma^\perp|^{-1}\sup_{x\in\widehat{R}}\left\|\left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\left(x\right)\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\left(x\right), e^{-i\langle x,l\rangle}D^{-l}\right]\right\|_{\mathrm{op}}$$
$$= |\Gamma^\perp|^{-1}\sup_{\xi\in\mathbb{T}^n}\left\|\left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\left(\xi\right)\otimes\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\left(\xi\right), e^{-i\langle\xi,l\rangle}D^{-l}\right]\right\|_{\mathrm{op}}$$
$$= \sup_{\xi\in\mathbb{T}^n}\|\mathbf{T}_i(l,\xi)\|_{\mathrm{op}}.$$

Beweis
Die erste und die letzte Gleichung folgen aus Bemerkung 10.38. Es wird die mittlere Gleichung bewiesen. Nach Lemma 10.42 b) gilt

$$\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\left(x+w\right) = \overline{\varrho\left(w\right)\widehat{h_{i,\Gamma}}\left(x\right)} = \varrho\left(w\right)\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}\left(x\right)$$

für alle $w \in \Gamma^{\perp}, x \in \widehat{R}$ und es folgt mit Lemma 9.11 und Lemma 10.42 c)

$$\begin{aligned}
&\left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x+w) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x+w), e^{-i\langle x+w,l\rangle} D^{-l}\right] \\
&= \left[\left(\varrho(w)\,\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x)\right) \otimes \left(\varrho(w)\,\widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right), e^{-i\langle x+w,l\rangle} D^{-l}\right] \\
&= \left[\varrho(w) \circ \left(\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x)\right) \circ \varrho(w)^*, e^{-i\langle x+w,l\rangle} D^{-l}\right] \\
&= \varrho(w) \circ \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x), e^{-i\langle x+w,l\rangle} \varrho(w)^* D^{-l} \varrho(w)\right] \circ \varrho(w)^* \\
&= \varrho(w) \circ \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x), e^{-i\langle x+w,l\rangle} e^{i\langle w,l\rangle} D^{-l}\right] \circ \varrho(w)^* \\
&= \varrho(w) \circ \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x), e^{-i\langle x,l\rangle} D^{-l}\right] \circ \varrho(w)^* .
\end{aligned}$$

Da $\varrho(w)$ für jedes $w \in \Gamma^{\perp}$ unitär ist, folgt

$$\begin{aligned}
&\left\| \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x+w) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x+w), e^{-i\langle x+w,l\rangle} D^{-l}\right] \right\|_{\mathrm{op}} \\
&= \left\| \varrho(w) \circ \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x), e^{-i\langle x,l\rangle} D^{-l}\right] \circ \varrho(w)^* \right\|_{\mathrm{op}} \\
&= \left\| \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x), e^{-i\langle x,l\rangle} D^{-l}\right] \right\|_{\mathrm{op}}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \widehat{R}$ und alle $w \in \Gamma^{\perp}$, also gilt

$$\begin{aligned}
&|\Gamma^{\perp}|^{-1} \sup_{x \in \widehat{R}} \left\| \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x), e^{-i\langle x,l\rangle} D^{-l}\right] \right\|_{\mathrm{op}} \\
&= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sup_{\substack{x \in \widehat{R} \\ w \in \Gamma^{\perp}}} \left\| \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(x+w) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(x+w), e^{-i\langle x+w,l\rangle} D^{-l}\right] \right\|_{\mathrm{op}} \\
&= |\Gamma^{\perp}|^{-1} \sup_{\xi \in \mathbb{T}^n} \left\| \left[\overline{\widehat{h_{i,\Gamma}}}(\xi) \otimes \widehat{h_{i,\Gamma}}(\xi), e^{-i\langle \xi,l\rangle} D^{-l}\right] \right\|_{\mathrm{op}} .
\end{aligned}$$

Dies ist die mittlere Gleichung. □

(10.44) Satz*
Sei Γ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}^n$ mit endlichem Index, so dass ein $l \in \mathbb{Z}^n$ existiert mit $l \notin \Gamma$ und $2l \in \Gamma$. Dann gilt für alle $1 \leq i \leq |\Gamma^{\perp}|$

$$\| [K_i, T_l] \|_{\mathrm{op}} = 1.$$

Beweis
Es gilt $e^{i\langle w,2l\rangle} = 1$ für alle $w \in \Gamma^{\perp}$ nach Definition von $\Gamma^{\perp}$, also $e^{i\langle w,l\rangle} \in \{\pm 1\}$. Somit hat der Vektor $\vec{w}^l$ nur reelle Einträge. Da nach Voraussetzung $l \notin \Gamma$ gilt, folgt mit der gleichen Argumentation wie im zweiten Fall im Beweis von Lemma 5.13, dass die Abbildung $\psi : \Gamma^{\perp} \ni z \mapsto e^{-i\langle z,l\rangle}$ nicht trivial ist. Es existiert also ein $w_0 \in \Gamma^{\perp}$, so dass $e^{-i\langle w_0,l\rangle} \neq 1$ gilt. Aus obiger Überlegung folgt $e^{-i\langle w_0,l\rangle} = -1$.

Für alle $w' \in \Gamma^{\perp}$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\varrho\left(w_0\right)^* \vec{w}^l\right)\left(w'\right) &= \vec{w}^l\left(w' - w_0\right) = e^{i\langle w' - w_0, l\rangle} \\ &= e^{-i\langle w_0, l\rangle} e^{i\langle w', l\rangle} = -e^{i\langle w', l\rangle} = -\vec{w}^l\left(w'\right)\end{aligned}$$

und damit folgt mit Lemma 10.42 d) und b) für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ und alle $1 \leq i \leq |\Gamma^{\perp}|$

$$\begin{aligned}\left\langle |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi + w_0\right)|^2, \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}} &= \left\langle \varrho\left(w_0\right) |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)|^2, \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}} = \left\langle |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)|^2, \varrho\left(w_0\right)^* \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}} \\ &= -\left\langle |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)|^2, \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}.\end{aligned} \tag{26}$$

Die Abbildung $T : \mathbb{T}^n \ni \xi \mapsto \langle |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)|^2, \vec{w}^l \rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}$ ist stetig, da $\widehat{h}_i$ für jedes i nach Voraussetzung stetig ist. Die Einträge des Vektors $\vec{w}^l$ sind reell, ebenso ist $|\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)|^2$ für alle $\xi \in \mathbb{T}^n$ reell, also gilt $T\left(\mathbb{T}^n\right) \subset \mathbb{R}$. Sei nun $\gamma : [0,1] \to \mathbb{T}^n$ ein Weg in $\mathbb{T}^n$ mit $\gamma\left(1\right) = w_0 + \gamma\left(0\right)$. Wird nun die stetige Abbildung

$$[0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto \left\langle |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\gamma\left(t\right)\right)|^2, \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}$$

betrachtet, so wechselt diese ihr Vorzeichen im Intervall $[0,1]$, vgl. (26). Der Zwischenwertsatz liefert die Existenz eines $s \in [0,1]$, so dass

$$\left\langle |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\gamma\left(s\right)\right)|^2, \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}} = 0$$

gilt. Damit, mit Lemma 10.43, Bemerkung 10.40 und Lemma 10.42 d) folgt

$$\begin{aligned}\|\,[K_i, T_l]\,\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{x \in R} \|\mathbf{T}_i(l,x)\,\|_{\mathrm{op}} = \sup_{\xi \in \mathbb{T}^n} \|\mathbf{T}_i(l,x)\,\|_{\mathrm{op}} \\ &= \sup_{\xi \in \mathbb{T}^n} \left(1 - |\Gamma^{\perp}|^{-2} \left|\left\langle \widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right), D^l \widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}\right|^2\right) \\ &= 1 - |\Gamma^{\perp}|^{-2} \inf_{\xi \in \mathbb{T}^n} \left|\left\langle \widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right), D^l \widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)\right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}\right|^2 \\ &= 1 - |\Gamma^{\perp}|^{-2} \inf_{\xi \in \mathbb{T}^n} \left|\left\langle |\widehat{h}_{i,\Gamma}\left(\xi\right)|^2, \vec{w}^l \right\rangle_{\mathbb{C}^{\Gamma^{\perp}}}\right|^2 \\ &= 1.\end{aligned}$$

□

Es stellt sich nun die Frage, welche Eigenschaften die Gruppe $\Gamma \subset \mathbb{Z}^n$ erfüllen muss, damit die Voraussetzungen von Satz 10.44 erfüllt sind.

(10.45) Bemerkung
Ein $l \in \mathbb{Z}^n$, das die Voraussetzungen des Satzes 10.44 erfüllt, existiert genau dann, wenn $|\mathbb{Z}^n/\Gamma| = |\Gamma^{\perp}|$ gerade ist.

Begründung: Angenommen, $|\mathbb{Z}^n/\Gamma|$ ist gerade. Nach dem Satz von Cauchy existiert dann ein Element $l + \Gamma \in \mathbb{Z}^n/\Gamma$ der Ordnung 2, vgl. [11, Satz 6.8]. Das heißt es gilt sowohl $2l + \Gamma = \Gamma$, also inbesondere $2l \in \Gamma$, als auch $l + \Gamma \neq \Gamma$, das heißt $l \notin \Gamma$.

Angenommen es existiert ein $l_0 \in \mathbb{Z}^n$, das $l_0 \notin \Gamma$ und $2l_0 \in \Gamma$ erfüllt, das heißt es gilt $l_0 + \Gamma \neq \Gamma$ sowie $2l_0 + \Gamma = \Gamma$. Das Element $l_0 + \Gamma$ hat also Ordnung 2 und da es sich bei $\mathbb{Z}^n/\Gamma$ um eine endlichen Gruppe handelt, ist $|\mathbb{Z}^n/\Gamma|$ gerade, vgl. [11, Korollar 5.20 a)].

A Anhang

(A.1) Definition und Satz (Initialtopologie)
Gegeben sei eine Menge X, eine Familie von topoloischen Räumen $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ und eine Familie von Abbildungen $(f_i : X \to X_i)_{i\in I}$. Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X heißt *Initialtopologie bezüglich* $(f_i)_{i\in I}$, wenn sie die folgende universelle Eigenschaft hat:

$$\begin{cases} \text{Ist } Y \text{ ein beliebiger topologischer Raum, so ist die Abbildung } g : Y \to X \\ \text{genau dann stetig, wenn } f_i \circ g : Y \to X_i \text{ für jedes } i \in I \text{ stetig ist.} \end{cases}$$

Auf X gibt es bezüglich $(f_i)_{i\in I}$ eine eindeutig bestimmte Initialtopologie. Die Initialtopologie ist die gröbste Topologie auf X, für die die Abbildungen $f_i : X \to X_i$ stetig sind.

Beweis
Vgl. [9, Definition 3.12, Satz 3.13]. □

(A.2) Satz
Seien X und Y topologische Vektorräume. Zudem sei der Raum X metrisierbar. Die Abbildung $A : X \to Y$ sei linear. Dann sind äquivalent:

(i) Die Abbildung A ist stetig.

(ii) Die Abbildung A ist beschränkt.

(iii) Ist $((x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Nullfolge, so ist die Menge $\{Ax_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt.

(iv) Ist $((x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Nullfolge, so ist $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in Y.

Beweis
Vgl. [10, Theorem 1.32]. □

(A.3) Definition (unbedingte Konvergenz)
Sei X ein topologischer Vektorraum. Die Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} x_k$$

konvergiert unbedingt in X gegen $x \in X$, wenn für alle offenen Mengen $U \subset X$ mit $x \in U$ eine endliche Menge $M \subset \mathbb{Z}^n$ existiert, so dass für alle endlichen Mengen $K \supset M$ gilt $\sum_{k\in K} x_k \in U$. Im Falle der unbedingten Konvergenz schreibt man $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} x_k$.

(A.4) Satz
Seien X und Y topologische Vektorräume. Die Abbildung $A : X \to Y$ sei linear und stetig. Angenommen es gilt $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} x_k$ mit unbedingter Konvergenz in X, dann folgt

$$Ax = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} Ax_k$$

mit unbedingter Konvergenz in Y.

Beweis
Es gelte $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} x_k$ mit unbedingter Konvergenz in X. Sei V eine beliebige Umgebung von Ax in Y. Da A stetig ist, existiert eine Umgebung U von x in X, so dass $AU \subset V$ gilt. Da $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} x_k$ unbedingt in X gegen x konvergiert, existiert eine endliche Menge $M \subset \mathbb{Z}^n$, so dass für alle endlichen Mengen $K \supset M$ gilt

$$\sum_{k \in K} x_k \in U.$$

Wegen der Linearität der Abbildung A folgt

$$\sum_{k \in K} Ax_k = A\left(\sum_{k \in K} x_k\right) \in AU \subset V,$$

also die unbedingte Konvergenz von $\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} Ax_k$ in Y gegen Ax. □

(A.5) Satz
Sei X ein Fréchet-Raum und Y ein topologischer Vektorraum. Sei $B : X \times X \to Y$ eine Bilinearform, die getrennt stetig ist, das heißt $B_{x_2}(\cdot) := B(\cdot, x_2)$ und $B_{x_1}(\cdot) := B(x_1, \cdot)$ sind jeweils stetig auf X. Dann ist B stetig.

Beweis
Vgl. [10, Theorem 2.17]. □

(A.6) Satz (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Es seien X und Y Fréchet-Räume. Die Abbildung $A : X \to Y$ sei linear und die Menge $G := \{(x, Ax)\,;\; x \in X\}$ sei abgeschlossen in $X \times Y$. Dann ist A stetig.

Beweis
Vgl. [10, Theorem 2.15]. □

(A.7) Bemerkung
Anstelle der Abgeschlossenheit der Menge G in $X \times Y$ im Satz vom abschlossenen Graphen A.6, kann auch folgendes nachgewiesen werden, vgl. [10, Theorem 2.15]:
Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X, so dass die Grenzwerte

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n \to \infty} Ax_n$$

existieren, so gilt $y = Ax$.

(A.8) Lemma*
Es sei (X, μ) ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und

$$H := L^2(X, \mu; \mathbb{C}^n) := \left\{ f : X \to \mathbb{C}^n \text{ messbar }; \; \|f\|_H^2 := \int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Außerdem sei die Abbildung $A : X \to \mathbb{C}^{n \times n}$ messbar. Dann gilt

a) Die Abbildung $X \ni x \mapsto \|A(x)\|_{\mathrm{op}}$ ist messbar.

b) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine messbare Abbildung $h : X \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, so dass für alle $x \in X$
$$\frac{\|A(x)h(x)\|}{\|h(x)\|} \geq \|A(x)\|_{\mathrm{op}} - \varepsilon$$
gilt.

Beweis

a) Da die Abbildung A nach Voraussetzung messbar ist und die Operatornorm stetig ist, ist die Abbildung $x \mapsto \|A(x)\|_{\mathrm{op}}$ messbar.

Dies kann aber auch auf eine andere Weise bewiesen werden, und dieser Weg wird sich für den Beweis von Teil b) als hilfreich erweisen. Seien $f_1, \ldots, f_n \in L^2(X, \mu; \mathbb{C}^n)$ mit $f_i(x) = e_i, 1 \leq i \leq n$, wobei e_i den i-te Einheitsvektor in $\mathbb{C}^n$ bezeichne. Wird die Menge S definiert durch
$$S := \left\{ g = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \; ; \; a_i \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n, g \not\equiv 0 \right\} \subset H,$$
so ist S abzählbar. Sei $(g_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ eine Abzählung von S, insbesondere gilt dann
$$\{g_k(x); \; x \in X, k \in \mathbb{N}\} = (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n \setminus \{0\}.$$
Da für festes $x \in X$ die Abbildung
$$C^n \setminus \{0\} \ni v \mapsto \|A(x)v\| / \|v\|$$
stetig ist und $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n \setminus \{0\}$ dicht in $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ enthalten ist, folgt
$$\begin{aligned} \|A(x)\|_{\mathrm{op}} &= \sup_{y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A(x)y\|}{\|y\|} = \sup_{y \in (\mathbb{Q}+i\mathbb{Q})^n \setminus \{0\}} \frac{\|A(x)y\|}{\|y\|} \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|A(x)g_k(x)\|}{\|g_k(x)\|}. \end{aligned}$$
Sei nun $k \in \mathbb{N}$ fest. Da die Abbildungen A und $g_k \not\equiv 0$ messbar sind, folgt die Messbarkeit der Abbildung
$$x \mapsto \frac{\|A(x)g_k(x)\|}{\|g_k(x)\|}.$$
Damit sind aber auch für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildungen
$$f_n : x \mapsto \max_{k \leq n} \frac{\|A(x)g_k(x)\|}{\|g_k(x)\|}$$
messbar und es folgt die Messbarkeit der Abbildung
$$\lim_{n \to \infty} f_n = f : x \mapsto \|A(x)\|_{\mathrm{op}} = \lim_{n \to \infty} \max_{k \leq n} \frac{\|A(x)g_k(x)\|}{\|g_k(x)\|}.$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Wird für $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$B_k := \left\{ x \in X \,;\, \frac{\|A(x)g_k(x)\|}{\|g_k(x)\|} \geq \|A(x)\|_{\mathrm{op}} - \varepsilon \right\}$$

definiert, so ist B_k nach a) für jedes $k \in \mathbb{N}$ messbar. Nun werden für $k \in \mathbb{N}$ die Mengen $A_k := B_k \setminus \bigcup_{m<k} B_m$ definiert; sie sind nach Konstruktion messbar und disjunkt. Ist $x \in X$ beliebig, so existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{\|A(x)g_k(x)\|}{\|g_k(x)\|} \geq \sup_{l \in \mathbb{N}} \frac{\|A(x)g_l(x)\|}{\|g_l(x)\|} - \varepsilon \overset{\text{a)}}{=} \|A(x)\|_{\mathrm{op}} - \varepsilon$$

erfüllt ist, das heißt x ist in der Menge B_k enthalten. Es gilt also

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} A_k = X.$$

Nach Konstruktion der Menge S sind die Funktionen $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konstant, das heißt es gilt $g_k(x) = c_k \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n \setminus \{0\}$ für alle $x \in X$. Definiert man $h(x) := g_k(x)$ für $x \in A_k$, so gilt $h(x) \neq 0$ für alle $x \in X$. Um die Messbarkeit der Funktion h zu zeigen, sei $B \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ eine messbare Menge. Dann gilt

$$\begin{aligned} h^{-1}(B) &= \left\{ x \in X \,;\, h(x) \in B \right\} = \left\{ x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \,;\, h(x) \in B \right\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ x \in A_k \,;\, h(x) \in B \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ x \in A_k \,;\, g_k(x) \in B \right\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ A_k \,;\, \exists\, x_0 \in A_k : g_k(x_0) \in B \right\}. \end{aligned}$$

Aus der Messbarkeit der Mengen $A_k, k \in \mathbb{N}$, folgt die Messbarkeit von $h^{-1}(B)$ und somit die Messbarkeit der Funktion h. Nach Konstruktion erfüllt h die Ungleichung

$$\frac{\|A(x)h(x)\|}{\|h(x)\|} \geq \|A(x)\|_{\mathrm{op}} - \varepsilon$$

für alle $x \in X$. □

(A.9) Satz*
Es sei (X, μ) ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und

$$H := L^2(X, \mu; \mathbb{C}^n) := \left\{ f : X \to \mathbb{C}^n \text{ messbar} \,;\, \|f\|_H^2 := \int_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Außerdem sei die Abbildung $A : X \to \mathbb{C}^{n \times n}$ messbar und $T : H \to H$ der von A induzierte Multiplikationsoperator, das heißt es gilt $(Tf)(x) = A(x) \cdot f(x)$ für alle $x \in X$. Dann gilt

$$\|T\|_{\mathrm{op}} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} \|A(x)\|_{\mathrm{op}},$$

wobei $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} \|A(x)\|_{\mathrm{op}} := \inf \left\{ M > 0 \,;\, \mu\left(\left\{ x \in X \,;\, \|A(x)\|_{\mathrm{op}} > M \right\} \right) = 0 \right\}$.

Beweis
Sei $f \in H$ mit $\|f\|_H \leq 1$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_H^2 &= \int\limits_X \| \left(Tf\right)(x)\|^2 d\mu(x) = \int\limits_x \|A(x)f(x)\|^2 d\mu(x) \\
&\leq \int\limits_X \|A(x)\|_{\text{op}}^2 \|f(x)\|^2 d\mu(x) \leq \int\limits_X \operatorname*{ess\,sup}_{y\in X} \|A(y)\|_{\text{op}}^2 \|f(x)\|^2 d\mu(x) \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{y\in X} \|A(y)\|_{\text{op}}^2 \|f\|_H^2,
\end{aligned}$$

also gilt

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\substack{f\in H \\ \|f\|_H \leq 1}} \frac{\|Tf\|_H}{\|f\|_H} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} \|A(x)\|_{\text{op}}.$$

Um

$$\|T\|_{\text{op}} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} \|A(x)\|_{\text{op}}$$

zu zeigen, sei $\varepsilon > 0$ und $h : X \to \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ die nach Lemma A.8 b) existierende messbare Funktion, so dass

$$\frac{\|A(x)h(x)\|}{\|h(x)\|} \geq \|A(x)\|_{\text{op}} - \varepsilon$$

für alle $x \in X$ erfüllt ist. Die Menge

$$M := \left\{ x \in X \,;\ \|A(x)\|_{\text{op}} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{y\in X} \|A(y)\|_{\text{op}} - \varepsilon \right\}.$$

hat aufgrund der Definition des wesentlichen Supremums positives Maß. Außerdem gilt $\mu(M) \leq \mu(X) < \infty$. Bezeichnet $\mathbb{1}_M$ die charakteristische Funktion der Menge M, so ist die Funktion

$$f : X \to \mathbb{C}^n, f(x) := \frac{h(x) \cdot \mathbb{1}_M}{\|h(x)\|},$$

messbar, da die Funktion h und die Menge M messbar sind. Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_H^2 &= \int\limits_X \|f(x)\|^2 d\mu(x) = \int\limits_X \frac{\|h(x) \cdot \mathbb{1}_M(x)\|^2}{\|h(x)\|^2} d\mu(x) \\
&= \int\limits_M d\mu(x) = \mu(M).
\end{aligned}$$

Damit, mit der Definition der Menge M und mit den Eigenschaften der Funktion h folgt dann

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_H^2 &= \int\limits_X \|Tf(x)\|^2 d\mu(x) = \int\limits_X \|A(x)f(x)\|^2 d\mu(x) \\
&= \int\limits_M \frac{\|A(x)h(x)\|^2}{\|h(x)\|^2} d\mu(x) \geq \int\limits_M \left(\|A(x)\|_{\text{op}} - \varepsilon\right)^2 d\mu(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \int\limits_M \left(\operatorname*{ess\,sup}_{y \in X} \|A(y)\|_{\text{op}} - 2\varepsilon \right)^2 d\mu(x) \\
&= \left(\operatorname*{ess\,sup}_{y \in X} \|A(y)\|_{\text{op}} - 2\varepsilon \right)^2 \int\limits_M d\mu(x) \\
&= \left(\operatorname*{ess\,sup}_{y \in X} \|A(y)\|_{\text{op}} - 2\varepsilon \right)^2 \|f\|_H^2,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\text{op}} = \sup_{g \in H} \frac{\|Tg\|_H}{\|g\|_H} &\geq \frac{\|Tf\|_H}{\|f\|_H} \\
&\geq \operatorname*{ess\,sup}_{y \in X} \|A(y)\|_{\text{op}} - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt $\|T\|_{\text{op}} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} \|A(x)\|_{\text{op}}$. □

(A.10) Satz (Youngsche Ungleichung)
Für $1 \leq p \leq \infty$ sei $f \in l^1(\mathbb{Z}^n)$ und $g \in l^p(\mathbb{Z}^n)$. Dann gilt

$$\|g * f\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)} \leq \|g\|_{l^p(\mathbb{Z}^n)} \|f\|_{l^1(\mathbb{Z}^n)},$$

also $g * f \in l^p(\mathbb{Z}^n)$

Beweis
Vgl. [6, Corollary 20.14]. □

(A.11) Satz (Fortsetzungssatz)
Ist D ein dichter Unterraum des normierten X, Y ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(D, Y)$, so existiert genau eine stetige Fortsetzung $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(X, Y)$, das heißt ein stetiger Operator mit $\widetilde{T}x = Tx$ für alle $x \in D$. Zusätzlich gilt $\|\widetilde{T}\|_{\text{op}} = \|T\|_{\text{op}}$.

Beweis
Vgl. [13, Satz II.1.5]. □

Literatur

[1] AACH, T. ; FÜHR, H.: *„On Bounds of Shift Variance in Two-Channel Multirate Filter Banks“*. – Erscheint in *IEEE Transactions on Signal Processing*

[2] AUSLANDER, L. ; MOORE, C.C.: *Unitary representations of solvable Lie groups*. American Math. Soc. Providence, R.I., 1966 (Memoirs of the American Mathematical Society ; 62)

[3] DEITMAR, A.: *A First Course in Harmonic Analysis*. 2. Auflage. Springer New York, 2005 (Universitext)

[4] ELSTRODT, J.: *Maß-und Integrationstheorie*. 6. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2009 (Springer-Lehrbuch)

[5] FEICHTINGER, H.G. ; FÜHR, H. ; GRÖCHENIG, K. ; KAIBLINGER, N.: „Operators Commuting with a Discrete Subgroup of Translations“. In: *Journal of Geometric Analysis* Vol. 16, No. 1, pp. 53–67 (2006)

[6] HEWITT, E. ; ROSS, K.A.: *Abstract Harmonic Analysis I*. Springer Berlin Heidelberg, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen ; 115)

[7] HEWITT, E. ; ROSS, K.A.: *Abstract Harmonic Analysis II*. Springer Berlin Heidelberg, 1970 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften ; 152)

[8] OHM, J.R. ; LÜKE, H.D.: *Signalübertragung: Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme*. 10. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2007 (Springer-Lehrbuch)

[9] QUERENBURG, B. v.: *Mengentheoretische Topologie*. 3. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2001 (Springer-Lehrbuch)

[10] RUDIN, W.: *Functional Analysis*. McGraw-Hill New York, 1973 (McGraw-Hill series in higher mathematics)

[11] SCHULZE-PILLOT, R.: *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*. 2. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2008 (Springer-Lehrbuch)

[12] VRETBLAD, A.: *Fourier Analysis and Its Applications*. Springer Berlin Heidelberg, 2003 (Graduate texts in mathematics ; 223)

[13] WERNER, D.: *Funktionalanalysis*. 6. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2007 (Springer-Lehrbuch)

Abbildungsverzeichnis